

## 6. Schaltalgebra

### 6.1 Einleitung

#### Aufgabe:

Vereinfache folgende Ausdrücke:

$$\overline{\overline{A}}; A \wedge 0; A \wedge 1; A \wedge A; A \wedge \overline{A}; A \vee 0; A \vee 1; A \vee A; A \vee \overline{A}$$

Tip: Stelle für jeden Ausdruck eine Wahrheitstabelle auf in der du die Variable und den Ausdruck selber hineinschreibst. Beobachte und vergleiche die einzelnen Kolonnen, um die Vereinfachung zu erkennen. Du kannst auch zusätzliche Hilfsausdrücke in die Tabelle hinzufügen.

Beispiel für den Ausdruck  $\overline{\overline{A}}$ :

$A$	$\overline{A}$	$\overline{\overline{A}}$
0	1	0
1	0	1

es gilt also:

$$\overline{\overline{A}} = A$$

## 6.2 Theoreme für eine Variable

Theoreme sind Rechenregeln für Variablen und Konstanten.

### 6.2.1 Theorem der NICHT-Funktion:

$$\overline{\overline{A}} = A$$

### 6.2.2 Theoreme der UND-Funktion:

$$A \wedge 0 = 0$$

$$A \wedge 1 = A$$

$$A \wedge A = A$$

$$A \wedge \overline{A} = 0$$

### 6.2.3 Theoreme der ODER-Funktion:

$$A \vee 0 = A$$

$$A \vee 1 = 1$$

$$A \vee A = A$$

$$A \vee \overline{A} = 1$$

### Aufgabe:

Wie kann man ein UND-Gatter mit 3 Eingängen zu einem UND-Gatter mit 2 Eingängen umfunktionieren?

## 6.3 Theoreme für mehrere Variablen

### 6.3.1 Die Kommutativgesetze:

$$A \wedge B = B \wedge A$$

$$A \vee B = B \vee A$$

### 6.3.2 Die Assoziativgesetze:

$$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C = A \wedge B \wedge C$$

$$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C = A \vee B \vee C$$

### 6.3.3 Die Distributivgesetze:

Das konjunktive Distributivgesetz:

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

Das disjunktive Distributivgesetz:

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

### Aufgabe:

Beweise die Distributivgesetze mit Hilfe einer Wahrheitstabelle.

## 6.4 Die Morganschen Gesetze:

### 6.4.1 Das erste Morgansche Gesetz:

$$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$$

Beweis:

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A \vee B}$	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0

### 6.4.2 Das zweite Morgansche Gesetz:

$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$$

Beweis:

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \wedge \overline{B}$	$A \vee B$	$\overline{A \vee B}$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0

Aufgabe:

Beweise, dass  $\overline{A \vee B \vee C} = \overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}$ .

**Aufgaben:**

Vereinfache:

1.  $Y = (K \vee \overline{M}) \wedge (K \vee M)$

2.  $Z = (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \overline{C})$

3.  $V = (A \wedge \overline{B} \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C)$

4.  $Z = \overline{A} \wedge B \wedge \overline{B} \wedge C$

5.  $X = (M \wedge \overline{N}) \vee (M \wedge N \wedge \overline{M})$

6.  $Y = B \vee (B \wedge C \wedge \overline{A}) \vee \overline{B}$

7.  $Z = X \wedge (S \vee \overline{X})$

8.  $X = A \vee (C \wedge \overline{\overline{B}} \wedge \overline{A} \wedge \overline{B})$

9.  $Y = A \wedge (A \vee B)$  Zur Erinnerung:  $A = A \vee 0$

10.  $Z = A \vee (A \wedge B)$  Zur Erinnerung:  $A = A \wedge 1$

11. Gib  $\overline{Z}$  an:  $Z = A \vee (B \wedge \overline{C}) \vee (C \wedge \overline{B})$

12. Gib  $\overline{X}$  an:  $X = (A \wedge \overline{B}) \vee [C \wedge (\overline{B \wedge A})]$

13. Vereinfache:  $Y = \overline{\overline{\overline{(A \wedge X)} \vee (\overline{X \wedge B \wedge A})} \wedge (\overline{X \wedge B})}$

14. Vereinfache:  $Z = \overline{\overline{\overline{A \wedge B} \vee \overline{B \wedge C}} \vee (A \wedge B)}$

**Lösungen zu den Aufgaben:**

Vereinfache:

$$1. Y = (K \vee \overline{M}) \wedge (K \vee M)$$

$$Y = K \vee (\overline{M} \wedge M)$$

$$Y = K \vee 0$$

$$\underline{\underline{Y = K}}$$

$$2. Z = (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \overline{C})$$

$$Z = (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \overline{C})$$

$$Z = (A \wedge B) \wedge (C \vee \overline{C})$$

$$\underline{\underline{Z = (A \wedge B)}}$$

$$3. V = (A \wedge \overline{B} \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C)$$

$$V = [(A \wedge C) \wedge (B \vee \overline{B})] \vee [(\overline{A} \wedge \overline{B}) \wedge (\overline{C} \vee C)]$$

$$\underline{\underline{V = (A \wedge C) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})}}$$

$$4. Z = \overline{A} \wedge B \wedge \overline{B} \wedge C$$

$$Z = \overline{A} \wedge C \wedge (B \vee \overline{B})$$

$$Z = \overline{A} \wedge C \wedge 0$$

$$\underline{\underline{Z = 0}}$$

$$5. X = (M \wedge \overline{N}) \vee (M \wedge N \wedge \overline{M})$$

$$X = (M \wedge \overline{N}) \vee (N \wedge (M \wedge \overline{M}))$$

$$X = (M \wedge \overline{N}) \vee (N \wedge (M \wedge \overline{M}))$$

$$X = (M \wedge \overline{N}) \vee (N \wedge 0)$$

$$X = (M \wedge \overline{N}) \vee 0$$

$$\underline{\underline{X = M \wedge \overline{N}}}$$

$$6. Y = B \vee (B \wedge C \wedge \overline{A}) \vee \overline{B}$$

$$Y = (B \wedge C \wedge A) \vee (B \wedge \overline{B})$$

$$Y = (B \wedge C \wedge A) \vee 1$$

$$\underline{\underline{Y = 1}}$$

$$7. Z = X \wedge (S \vee \bar{X})$$

$$Z = (X \wedge S) \vee (X \wedge \bar{X})$$

$$Z = (X \wedge S) \vee 0$$

$$\underline{\underline{Z = X \wedge S}}$$

$$8. X = A \vee (C \wedge \bar{B} \wedge \bar{A} \wedge \bar{B})$$

$$X = A \vee (\bar{A} \wedge C \wedge (B \wedge \bar{B}))$$

$$X = A \vee ((\bar{A} \wedge C) \wedge 0)$$

$$X = A \vee 0$$

$$\underline{\underline{X = A}}$$

$$9. Y = A \wedge (A \vee B) \quad \text{mit} \quad A = A \vee 0$$

$$Y = (A \vee 0) \wedge (A \vee B)$$

$$Y = A \vee (0 \wedge B)$$

$$Y = A \vee 0$$

$$\underline{\underline{Y = A}}$$

$$10. Z = A \vee (A \wedge B) \quad \text{mit} \quad A = A \wedge 1$$

$$Z = (A \wedge 1) \vee (A \wedge B)$$

$$Z = A \wedge (1 \vee B)$$

$$Z = A \wedge 1$$

$$\underline{\underline{Z = A}}$$

$$11. \text{Gib } \bar{Z} \text{ an: } Z = A \vee (B \wedge \bar{C}) \vee (C \wedge \bar{B})$$

$$\bar{Z} = \overline{A \vee (B \wedge \bar{C}) \vee (C \wedge \bar{B})}$$

$$\bar{Z} = \bar{A} \wedge \overline{(B \wedge \bar{C})} \wedge \overline{(C \wedge \bar{B})}$$

$$\underline{\underline{\bar{Z} = \bar{A} \wedge (\bar{B} \vee C) \wedge (\bar{C} \vee B)}}$$

$$12. \text{Gib } \bar{X} \text{ an: } X = (A \wedge \bar{B}) \vee [C \wedge (B \wedge \bar{A})]$$

$$\bar{X} = \overline{(A \wedge \bar{B}) \vee [C \wedge (B \wedge \bar{A})]}$$

$$\bar{X} = \overline{(A \wedge \bar{B})} \wedge \overline{[C \wedge (B \wedge \bar{A})]}$$

$$\underline{\underline{\bar{X} = (\bar{A} \wedge B) \wedge [\bar{C} \vee (B \wedge \bar{A})]}}$$

13. Vereinfache:  $Y = \overline{\overline{(A \wedge X)} \vee \overline{(X \wedge B \wedge \overline{A})} \wedge \overline{(X \wedge \overline{B})}}$

$$Y = \overline{\left[ \overline{(A \wedge X)} \vee \overline{(X \wedge B \wedge \overline{A})} \right] \wedge \overline{(X \wedge \overline{B})}}$$

$$Y = \overline{\left[ (\overline{A} \vee \overline{X}) \vee (\overline{X} \vee \overline{B} \vee A) \right] \wedge \overline{(X \wedge \overline{B})}}$$

$$Y = \overline{\left[ (\overline{A} \vee A) \vee (\overline{X} \vee \overline{X}) \vee \overline{B} \right] \wedge \overline{(X \wedge \overline{B})}}$$

$$Y = \overline{\left[ 1 \vee (\overline{X} \vee \overline{X}) \vee \overline{B} \right] \wedge \overline{(X \wedge \overline{B})}}$$

$$Y = 1 \vee \overline{(X \wedge \overline{B})}$$

$$\underline{\underline{Y = 1}}$$

14. Vereinfache:  $Z = \overline{\overline{A \wedge B} \vee \overline{B \wedge C} \vee (A \wedge B)}$

$$Z = \overline{\overline{A \wedge B} \vee \overline{B \wedge C} \vee (A \wedge B)}$$

$$Z = \overline{(\overline{A \wedge B} \vee \overline{B \wedge C}) \wedge \overline{A \wedge B}}$$

$$Z = \overline{(\overline{A} \vee \overline{B} \vee B \vee \overline{C}) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B})}$$

$$Z = \overline{(\overline{A} \vee 1 \vee \overline{C}) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B})}$$

$$\underline{\underline{Z = (\overline{A} \vee \overline{B})}}$$