

2. Negative Dualzahlen darstellen

2.1 Subtraktion von Dualzahlen

2.1.1 Direkte Subtraktion (Tafelrechnung)

siehe ARCOR T0IF

Nachteil dieser Methode:

Diese Form der Subtraktion kann nur sehr schwer von einer Elektronik (CPU) durchgeführt werden.

2.1.2 Subtraktion durch Addition des Komplements

2.1.2.1 Dezimalzahlen

Eine Subtraktion von zwei Dezimalzahlen kann durch eine Addition mit dem 10er-Komplement ersetzt werden, wenn man den Übertrag nicht betrachtet.

Beispiel:

		Subtraktion	Addition
Minuend	→	95000	95000
Subtrahend	→	-85000	+15000
Differenz	→	10000	±10000

- 15000 ist das 10er-Komplement zu 85000
- Subtrahend 85000 und 10er-Komplement 15000 ergänzen sich bei 5 Stellen zu:

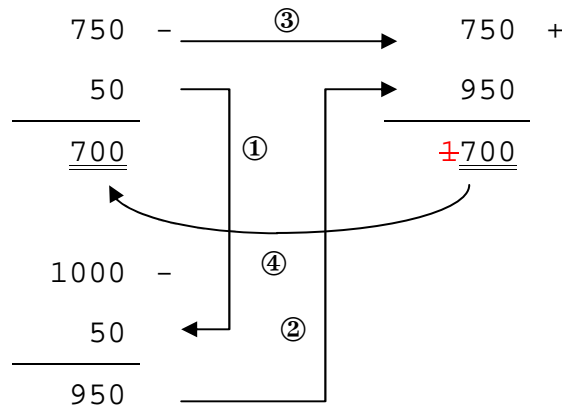
$$85000 + 15000 = 100000 = 10^5$$

Das 10er-Komplement berechnet sich also bei n Stellen wie folgt:

$$\mathbf{10er\text{-}Komplement = 10^n - \text{Subtrahend}}$$

Beispiel:

Berechne $750 - 50$ mit Hilfe des 10er-Komplements.



$$\underline{750 - 50 = 700}$$

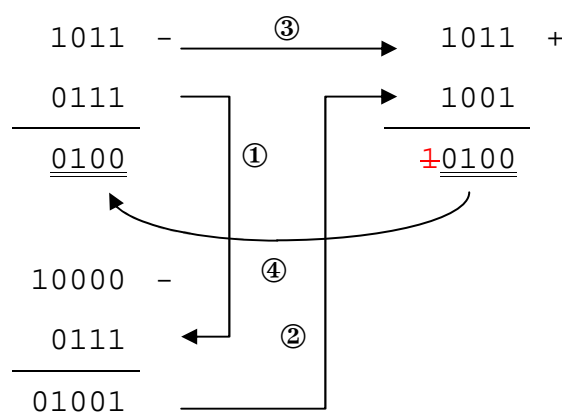
2.1.2.2 Dualzahlen

Eine Subtraktion von zwei Dezimalzahlen kann durch eine Addition mit dem 2er-Komplement ersetzt werden, wenn man den Übertrag nicht betrachtet.

2er-Komplement = $2^n - \text{Subtrahend}$

Beispiel:

Berechne $1011 - 0111$ mit Hilfe des 2er-Komplements.



$$\underline{1011 - 0111 = 0100}$$

Problem:

Für die Berechnung des 2er-Komplements ist wieder eine direkte Subtraktion nötig.

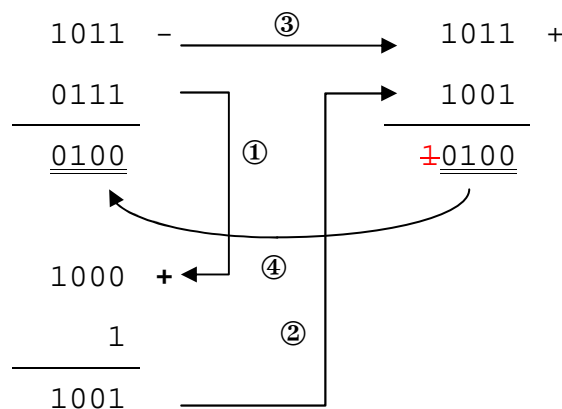
Lösung:

Das 2er-Komplement läßt sich auch wie folgt berechnen:

1. Erweitern des Subtrahenden auf n Stellen.
2. Invertieren des Subtrahenden.
3. Zum invertierten Subtrahenden 1 hinzuaddieren.

Beispiel:

Berechne $1011 - 111$ mit Hilfe des 2er-Komplements.



$$\underline{1011 - 0111 = 0100}$$

Aufgabe:

Berechne $1001100 - 10001 (=1000011)$ und $110100 - 11010 (=11010)$ mit Hilfe des Zweierkomplements.

Bemerkung:

Bisher können wir nur positive Zahlen addieren und subtrahieren. Wir können zum Beispiel folgende Rechnung noch nicht im Dualen durchführen: $(-5) - 3 =$

Es fehlt uns eine Darstellungsmöglichkeit negativer Zahlen im Dualen.

2.2 Negative Dualzahlen

In einer Rechenschaltung muss das Minuszeichen auch binär dargestellt werden

2.2.1 "+" ≙ 0 "-" ≙ 1

Durch das höchstwertigste Bit wird das Vorzeichen festgelegt.

Beispiel:

Dualzahl	Dezimalzahl
0111	7
0110	6
0101	5
0100	4
0011	3
0010	2
0001	1
0000	0
1000	0
1001	-1
1010	-2
1011	-3
1100	-4
1101	-5
1110	-6
1111	-7

Problem:

$$\begin{array}{rcl}
 1d + & \rightarrow & 0001b + \\
 -2d & \rightarrow & 1010b \\
 \hline
 -3d & \leftarrow & 1011b
 \end{array}$$

Schlussfolgerung:

Diese Darstellung negativer Dualzahlen ist nicht geeignet um Rechnungen durchzuführen.

2.2.2 Zweierkomplementdarstellung

Zur Erinnerung:

Mit Hilfe des Zweierkomplements konnte eine Subtraktion in eine Addition umgewandelt werden.

Vorher:

$$\begin{array}{r} 101b - \\ \underline{011b} \\ 010b \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5d - \\ \underline{3d} \\ 2d \end{array}$$

Nachher:

$$\begin{array}{r} 101b + \\ \underline{101b} \\ \pm 010b \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5d + \\ \underline{-3d} \\ 2d \end{array}$$

Zweierkomplementdarstellung:

Eine negative Dualzahl kann offensichtlich durch sein Zweierkomplement dargestellt werden.

z.B. :

$$-3d \hat{=} 101b$$

Damit aber keine Verwechslung mit $+5d$ auftritt ($+5d \hat{=} 101b$) muss noch ein **Vorzeichenbit** eingeführt werden.

$$-3d \hat{=} 1101b$$

$$+5d \hat{=} 0101b$$

Beispiel Zweierkomplementdarstellung:

Dualzahl	Dezimalzahl
0111	7
0110	6
0101	5
0100	4
0011	3
0010	2
0001	1
0000	0
1111	-1
1110	-2
1101	-3
1100	-4
1011	-5
1010	-6
1001	-7
1000	-8

Beispielrechnung:

$$\begin{array}{rcl}
 1d & + & \rightarrow & 0001b & + \\
 -2d & & \rightarrow & 1110b & \\
 \hline
 -1d & & \leftarrow & 1111b &
 \end{array}$$

Aufgabe:

Welchen Dezimalwert hat die Zahl 10010101b, je nachdem ob wir sie in Zweierkomplement- oder Normaldarstellung interpretieren?

a. Normaldarstellung:

$$10010101b = 128 + 16 + 4 + 1$$

$$\underline{\underline{10010101b = 149d}}$$

b. Zweierkomplementdarstellung:

1. Methode:

$$\begin{array}{rcl}
 \boxed{1}0010101b & = & -107d \\
 \downarrow & & \uparrow \\
 0010101b - & & \\
 \quad 1b & & \\
 \hline
 0010100b & & \\
 \downarrow \bar{x} & & \\
 1101011b & = & 107d
 \end{array}$$

$$\underline{\underline{10010101b = -107d}}$$

2. Methode:

$$\begin{array}{rcl}
 \boxed{1}0010101b & = & -107d \\
 \downarrow \bar{x} & & \uparrow \\
 1101010b + & & \\
 \quad 1b & & \\
 \hline
 1101011b & = & 107d
 \end{array}$$

$$\underline{\underline{10010101b = -107d}}$$

3. Methode:

$$\begin{array}{rcll} 10010101b & = & 10000000b + & \rightarrow -128d + \\ & & 00010000b + & \rightarrow 16d + \\ & & 00000100b + & \rightarrow 4d + \\ & & 00000001b & \rightarrow 1d \\ & & & \hline & & & -107d \end{array}$$

$$\underline{\underline{10010101b = -107d}}$$

Aufgaben zu den negativen Dualzahlen:

- a) Gib 56d in Normaldarstellung und in Zweierkomplementdarstellung an.
- b) Gib -56d in Normaldarstellung und in Zweierkomplementdarstellung an.
- c) Gib -56d in 10-stelliger Zweierkomplementdarstellung an.
- d) Gib den Dezimalwert der Dualzahl 10110001 an. Interpretiere dazu die Dualzahl einmal in Zweierkomplementdarstellung und einmal in Normaldarstellung.
- e) Gib den Dezimalwert der Dualzahl 00110011 an. Interpretiere dazu die Dualzahl einmal in Zweierkomplementdarstellung und einmal in Normaldarstellung.
- f) In Turbo Pascal wird einer Variablen vom Typ "byte" ein Speicherplatz von 1 Byte reserviert und der Inhalt wird als Normaldarstellung interpretiert. Gib die kleinste und die größte Dezimalzahl an, die sich in einer Variablen vom Typ "byte" speichern lässt. Welchen Zahlen entspricht dies im Dualen?
- g) In Turbo Pascal wird einer Variablen vom Typ "shortint" ein Speicherplatz von 1 Byte reserviert und der Inhalt wird als Zweierkomplementdarstellung interpretiert. Gib die kleinste und die größte Dezimalzahl an, die sich in einer Variablen vom Typ "shortint" speichern lässt. Welchen Zahlen entspricht dies im Dualen?
- h) Berechne folgende Operationen im Dualen unter Verwendung einer festen Bitbreite von 8 Bit.

Führe die Subtraktionen mit Hilfe des Zweierkomplements durch.

- $(-40d) + (+50d)$
- $(-40d) - (+50d)$
- $(+50d) - (+40d)$
- $(+40d) - (+50d)$