# 3. Nombres complexes en électrotechnique

## 3.1 Introduction

La condition pour pouvoir résoudre un problème dans un circuit RLC était jusqu'à présent de pouvoir tracez un diagramme vectoriel (deut.: Zeigerdiagramm). Ceci devient quasiment impossible dans des circuits plus complexes. Avec les nombres complexes on aura un outil qui nous permettra de traiter aussi ces circuits d'une façon purement algébrique (deut.: rechnerisch).

## 3.2 L'unité imaginaire j

Essayons de résoudre les équations suivantes:

- $2x = 6$ solution: $x = 3$

  $x \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entier positifs)

- $2x = -6$ pas de solution dans $\mathbb{N}$ mais dans $\mathbb{Z}$. $x = -3$

  ($\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres entier positifs et négatifs). $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

- $3x = 5$ pas de solution dans $\mathbb{Z}$ mais dans $\mathbb{Q}$. $x = \frac{5}{3}$

  ($\mathbb{Q}$ est l'ensemble des fractions). $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

- $x^2 = 5$ pas de solution dans $\mathbb{Q}$ mais dans $\mathbb{R}$. $x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$

  ($\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels). $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

- $x^2 = -1$ pas de solution dans $\mathbb{R}$ mais dans $\mathbb{C}$. $x = j$ ou $x = -j$

  ($\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes). $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

C'est en 1777 que le mathématicien Leonhard Euler a eu l'idée d'inventer le nouveau nombre j avec la propriété suivante:

$$\boxed{j^2 = -1}$$

On peut donc noter que:

$$j = \sqrt{-1}$$

## 3.3 Les nombres complexes

On appelle nombre complexe tout nombre $\underline{z}$ qui est de la forme suivante:

$$\underline{z} = x + j \cdot y \quad \text{où a et b sont des nombres réels}$$

On appelle le nombre x la partie réel de z. On écrit: $x = \mathrm{Re}(\underline{z})$

On appelle le nombre y la partie imaginaire de z. On écrit: $y = \mathrm{Im}(\underline{z})$

**Exemple d'un nombre complexe:**

$\underline{z} = -3 + 4{,}5 \cdot j$

**Question:**

A quoi sert l'invention des nombres complexes?

**Réponse:**

Voir p.ex. l'Exercice 1:

**Exercice 1:**

Résolvez les équations suivantes:

a) $\underline{z}^2 = -4$

b) $\underline{z}^2 - 4\underline{z} + 5 = 0$ solution: $\underline{z}_1 = 2 - j$ $\underline{z}_2 = 2 + j$

c) $\underline{z}^2 - 8\underline{z} + 52 = 0$ solution: $\underline{z}_1 = 4 - 6j$ $\underline{z}_2 = 4 + 6j$

**Question:**

Qu'est ce que ça nous apporte en électrotechnique?

**Réponse:**

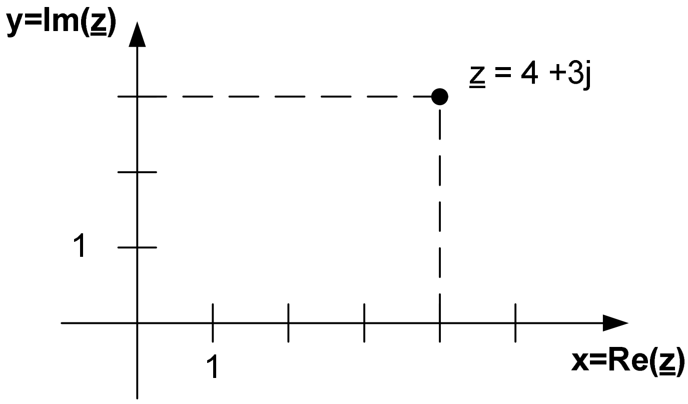
Jusqu'à présent rien.

Ce n'est que par l'idée de Carl Friederich Gauß de représenter un nombre complexe par un point dans un plan à deux dimensions que les nombres complexes trouvent aussi une application en électrotechnique.

## 3.4 Représentation graphique des nombres complexes

Un nombre complexe peut être représenté par un point dans le plan des nombres complexes.

**Exemple:**

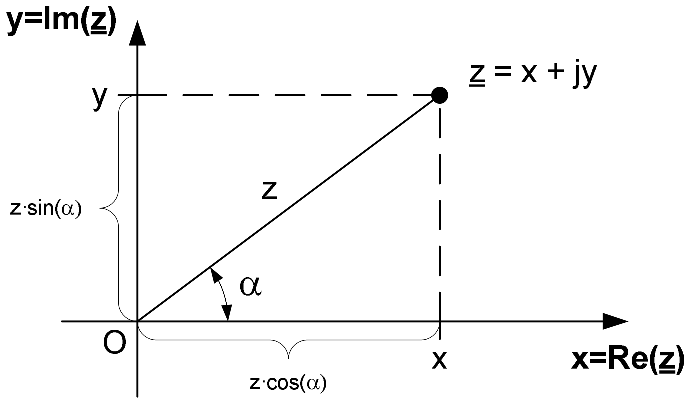



**Exercice 2:**

Tracez les nombres complexes suivants dans un plan:

- $\underline{z}_1 = -2+3j$
- $\underline{z}_2 = -\frac{1}{2}-3j$
- $\underline{z}_3 = j$
- $\underline{z}_4 = 3$

## 3.5 Notations (deut. Schreibweisen) des nombres complexes




z est la distance entre l'origine O et le point $\underline{z}$.

### 3.5.1 Notation algébrique

$$\underline{z} = x + y \cdot j$$

### 3.5.2 Notation polaire

Comme $x = z \cdot \cos(\alpha)$ et $y = z \cdot \sin(\alpha)$ on peut aussi écrire $\underline{z}$ sous la forme:

$$\underline{z} = z \cdot \cos(\alpha) + j \cdot z \cdot \sin(\alpha)$$

En mettant z en évidence on obtient la notation polaire.

$$\boxed{\underline{z} = z \cdot [\cos(\alpha) + j \cdot \sin(\alpha)]} \quad \text{avec} \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

On choisit α toujours entre -180° et 180° resp. $-\pi$ et $+\pi$.

### 3.5.3 Notation exponentielle

On peut montrer que:

$$z \cdot \cos(\alpha) + z \cdot j \cdot \sin(\alpha) = z \cdot e^{j\alpha} \quad \text{où } e = 2{,}71828\ldots$$

On peut donc aussi écrire un nombre complexe sous la forme:

$$\boxed{\underline{z} = z \cdot e^{j\alpha}}$$

Cette notation s'appelle *notation exponentielle*. Par définition on choisit α toujours entre -180° et 180°. z doit être positif.

**Exercice 3:**

Tracez les nombres complexes suivants dans un plan:

- $\underline{z}_1 = 3 \cdot e^{j60°}$
- $\underline{z}_2 = 6 \cdot e^{j(-135°)}$

**Exercice 4:**

Convertissez algébriquement (deut.: rechnerisch) la notation des nombres complexes suivants comme demandé.

a) $\underline{z} = 3 \cdot e^{j60°}$ en notation algébrique

b) $\underline{z} = 3 + j2$ en notation exponentielle

c) $\underline{z} = 3 \cdot e^{j(-60°)}$ en notation algébrique

d) $\underline{z} = -3 - j2$ en notation exponentielle

e) $\underline{z} = 3$ en notation exponentielle

f) $\underline{z} = -3$ en notation exponentielle

g) $\underline{z} = -5j$ en notation exponentielle

## 3.6 Règles de calcul dans $\mathbb{C}$

Toute la thématique de la représentation graphique et de la notation des nombres complexes devrait nous faire fortement penser aux vecteurs. Les nombres complexes on pourtant un grand avantage par rapport aux vecteurs, c'est qu'on peut aussi les multiplier et diviser. Cette propriété est très importante en électrotechnique comme p.ex. $P = U \cdot I$ et $Z = \frac{U}{I}$.

Avant de se lancer définitivement dans l'application des nombres complexes en électrotechnique il faudra traiter les règles de calcul sur les nombres complexes.

### 3.6.1 Addition de nombres complexes

**addition en notation algébrique:**

Soit $\underline{U}_1 = x_1 + jy_1$ ; $\underline{U}_2 = x_2 + jy_2$ et $\underline{U}_T = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$ alors:

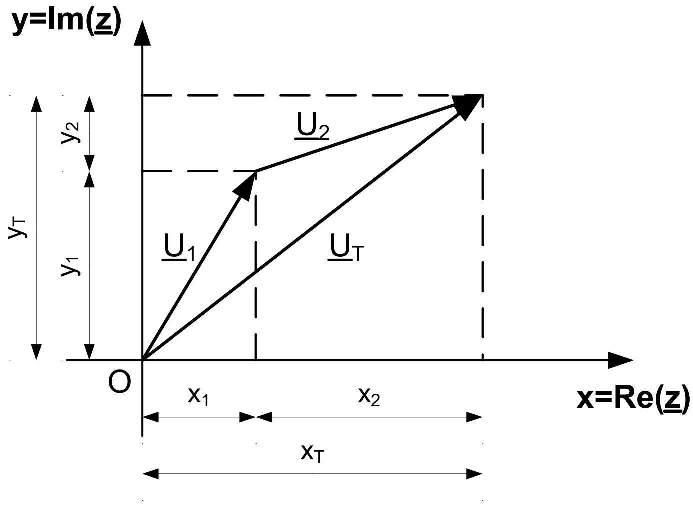
$$\boxed{\begin{aligned} \underline{U}_T &= \underline{U}_1 + \underline{U}_2 \\ &= x_1 + jy_1 + x_2 + jy_2 \\ \underline{U}_T &= (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \end{aligned}}$$

**exemple:**

Soit $\underline{U}_1 = \frac{3}{2} + j\frac{5}{2}$ et $\underline{U}_2 = 3 + j$ alors:

$$\begin{aligned} \underline{U}_T &= \underline{U}_1 + \underline{U}_2 \\ &= \frac{3}{2} + j\frac{5}{2} + 3 + j \\ &= \left(\frac{3}{2} + 3\right) + j\left(\frac{5}{2} + 1\right) \\ \underline{U}_T &= \frac{9}{2} + j\frac{7}{2} \end{aligned}$$

**représentation graphique de l'exemple précédent:**




L'addition en notation classique est assez intuitive. Si les deux nombres complexes sont en notation exponentielle il faut passer par la notation polaire pour résoudre le problème.

**addition en notation exponentielle:**

Soit $\underline{U}_1 = U_1 \cdot e^{j\alpha_1}$ ; $\underline{U}_2 = U_2 \cdot e^{j\alpha_2}$ et $\underline{U}_T = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$ alors:

$$\boxed{\begin{aligned}
\underline{U}_T &= \underline{U}_1 + \underline{U}_2 \\
&= U_1 \cdot e^{j\alpha_1} + U_2 \cdot e^{j\alpha_2} \\
&= U_1 \cdot \cos(\alpha_1) + j \cdot U_1 \cdot \sin(\alpha_1) + U_2 \cdot \cos(\alpha_2) + j \cdot U_2 \cdot \sin(\alpha_2) \\
\underline{U}_T &= \left[U_1 \cdot \cos(\alpha_1) + U_2 \cdot \cos(\alpha_2)\right] + j \cdot \left[U_1 \cdot \sin(\alpha_1) + U_2 \cdot \sin(\alpha_2)\right]
\end{aligned}}$$

**Exercice 5:**

Additionnez $\underline{z}_1 = 3 \cdot e^{j60°}$ et $\underline{z}_2 = 6 \cdot e^{j(-45°)}$.

### 3.6.2 Soustraction de nombres complexes

La soustraction de nombres complexes se fait analogue (deut.: entsprechend) à l'addition.

### 3.6.3 Multiplication et division de nombres complexes

**multiplication et division en notation exponentielle:**

**Rappel sur les puissances:**

$$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$$

$$\boxed{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$$

Soit $\underline{U} = U \cdot e^{j\alpha}$ et $\underline{I} = I \cdot e^{j\beta}$ alors:

| | |
|---|---|
| $\underline{U} \cdot \underline{I} = U \cdot e^{j\alpha} \cdot I \cdot e^{j\beta}$<br>$= U \cdot I \cdot e^{j\alpha} \cdot e^{j\beta}$<br>$= U \cdot I \cdot e^{j\alpha + j\beta}$<br>$\underline{U} \cdot \underline{I} = U \cdot I \cdot e^{j(\alpha+\beta)}$ | $\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U \cdot e^{j\alpha}}{I \cdot e^{j\beta}}$<br>$= \frac{U}{I} \cdot e^{j\alpha - j\beta}$<br>$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U}{I} \cdot e^{j(\alpha-\beta)}$ |

**Exercice 6:**

Calculez $\underline{U}_C = \underline{Z}_C \cdot \underline{I}$ si $\underline{Z}_C = 50\Omega \cdot e^{-j90°}$ et $\underline{I} = 2A \cdot e^{j90°}$.

**Exercice 7:**

Calculez $\underline{Z}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{I}}$ si $\underline{U}_C = 50V \cdot e^{j0°}$ et $\underline{I} = 2A \cdot e^{j90°}$.

**multiplication et division en notation algébrique:**

**Exercice 8:**

Calculez $\underline{z}_3 = \underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2$ en développant. $\underline{z}_1 = -2+3j$. $\underline{z}_2 = -\frac{1}{2} -3j$.

**Exercice 9:**

Calculez $\underline{z} = \frac{3+j4}{2-j5}$.

> **Tuyau:**
> Pour faire la division il faut éliminer j dans le dénominateur en multipliant avec le conjugué. Le conjugué du nombre complexe a+jb est le nombre a-jb.

**Exercice 10:**

Calculez:

a) $(2+3j)\cdot(4+5j)$

b) $\frac{2+3j}{4+5j}$

**Exercice 11:**

Démontrez que:

$$\frac{1}{j} = -j$$

---

> **Résumé**:
> L'addition et la soustraction se font plus facilement en notation algébrique. La division et la multiplication se font plus facilement en notation exponentielle.

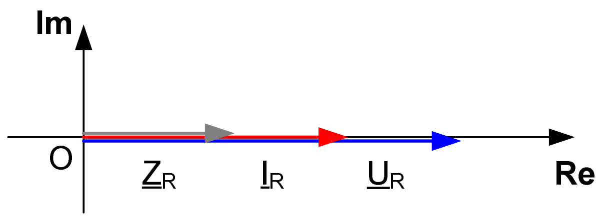
## 3.7 Application des nombres complexes en électrotechnique

### 3.7.1 Impédance et admittance (deut.: Scheinleitwert) complexe de résistances ohmiques, bobines et condensateurs

L'impédance complexe est définie comme suit:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$$

On sait que sur une résistance ohmique la tension et le courant sont en phase.




La tension $\underline{U}_R$ et le courant $\underline{I}_R$ complexe peuvent donc être notés come suit:

$$\underline{U}_R = U_R \cdot e^{j0°}$$

$$\underline{I}_R = I_R \cdot e^{j0°}$$

Il en suit que:

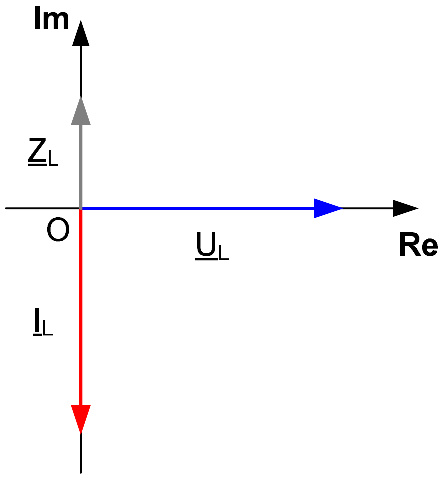
$$\begin{aligned} \underline{Z}_R &= \frac{\underline{U}_R}{\underline{I}_R} \\ &= \frac{U_R \cdot e^{j0°}}{I_R \cdot e^{j0°}} \\ &= \frac{U_R}{I_R} \\ \underline{Z}_R &= R \end{aligned}$$

L'impédance complexe $\underline{Z}_R$ d'une résistance ohmique est donc purement réelle. Pour l'admittance complexe $\underline{Y}_R$ il vaut:

$$\underline{Y}_R = \frac{1}{\underline{Z}_R}$$

$$\underline{Y}_R = \frac{1}{R}$$

On sait que sur une bobine le courant est 90° en retard par rapport à la tension.




La tension $\underline{U}_L$ et le courant $\underline{I}_L$ complexe peuvent donc être notés come suit:

$$\underline{U}_L = U_L \cdot e^{j0°}$$

$$\underline{I}_L = I_L \cdot e^{j(-90°)}$$

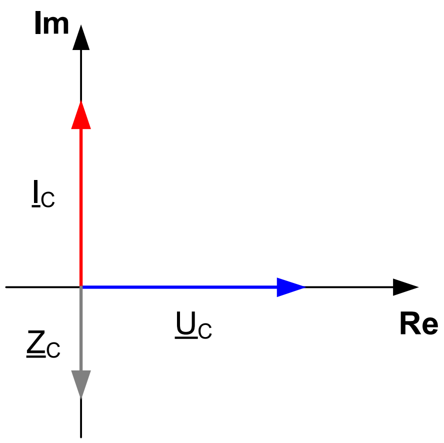
Il en suit que:

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_L &= \frac{\underline{U}_L}{\underline{I}_L} \\
&= \frac{U_L \cdot e^{j0°}}{I_L \cdot e^{j(-90°)}} \\
&= \frac{U_L}{I_L} \cdot e^{j(0°-(-90°))} \\
&= X_L \cdot e^{j90°} \\
&= X_L \cdot j \\
\underline{Z}_L &= j \cdot X_L
\end{aligned}$$

L'impédance complexe $\underline{Z}_L$ d'une bobine est donc purement imaginaire. Pour l'admittance complexe $\underline{Y}_R$ il vaut:

$$\begin{aligned}
\underline{Y}_L &= \frac{1}{\underline{Z}_L} \\
&= \frac{1}{jX_L} \\
\underline{Y}_L &= -j\frac{1}{X_L}
\end{aligned}$$

On sait que sur un condensateur le courant est 90° en avance par rapport à la tension.




La tension $\underline{U}_C$ et le courant $\underline{I}_C$ complexes peuvent donc être notés comme suit:

$$\underline{U}_C = U_C \cdot e^{j0°}$$

$$\underline{I}_C = I_C \cdot e^{j90°}$$

Il en suit que:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_C &= \frac{\underline{U}_C}{\underline{I}_C} \\ &= \frac{U_C \cdot e^{j0°}}{I_C \cdot e^{j90°}} \\ &= \frac{U_C}{I_C} \cdot e^{j(0°-90°)} \\ &= X_C \cdot e^{j(-90°)} \\ &= X_C \cdot -j \\ \underline{Z}_C &= -j \cdot X_C\end{aligned}$$

L'impédance complexe $\underline{Z}_C$ d'un condensateur est donc purement imaginaire. Pour l'admittance complexe $\underline{Y}_R$ il vaut:

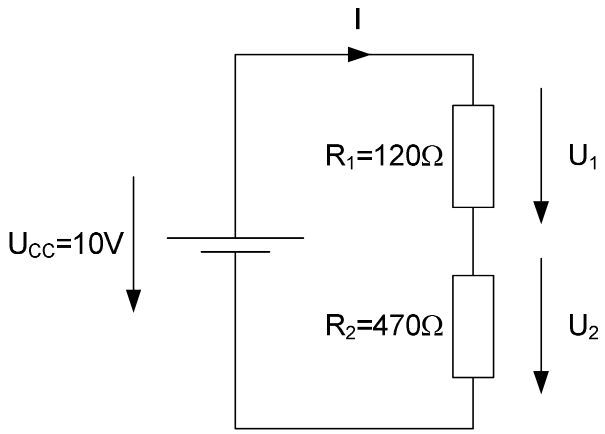
$$\begin{aligned}\underline{Y}_C &= \frac{1}{\underline{Z}_C} \\ &= \frac{1}{-jX_C} \\ \underline{Y}_C &= j\frac{1}{X_C}\end{aligned}$$

### 3.7.2 Résolution de problèmes électrotechniques à l'aide des nombres complexes

**Exercices sur l'application des nombres complexes en électrotechnique:**

**Exercice 12:**

Soit le circuit suivant.

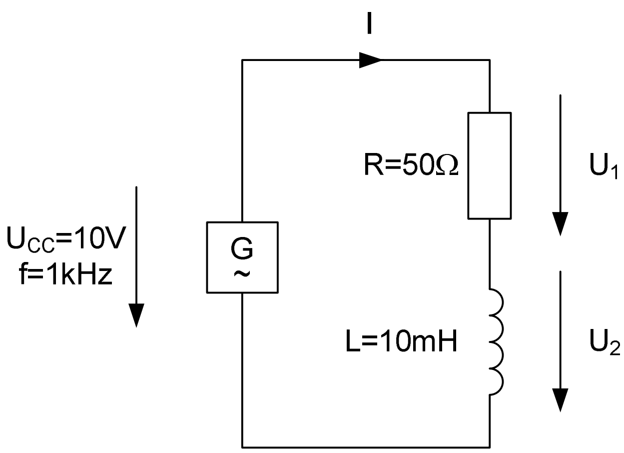



Calculez les valeurs du courant total I et des tensions partielles $U_1$ et $U_2$ en suivant la stratégie des circuits mixtes, qui est:

- Calculer la valeur de la résistance totale du circuit.
- Calculer la valeur du courant totale du circuit.
- Calculer les valeurs des tensions et courants partiels en appliquant les lois de Kirchhoff et du bon sens.

**Exercice 13:**

Soit le circuit suivant.



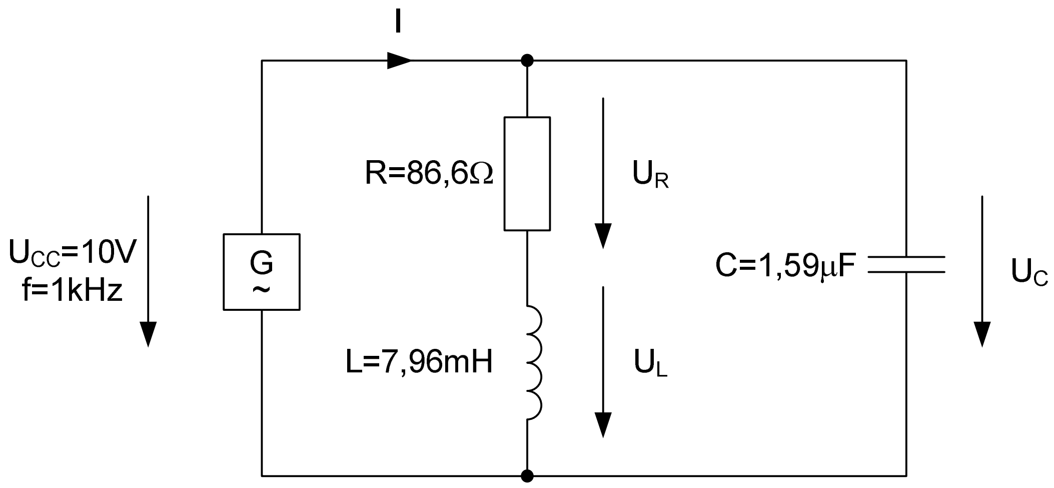

a) Calculez les valeurs du courant total I et des tensions partielles $U_1$ et $U_2$ en suivant la même stratégie qu'à l'exercice précédent mais à l'aide des nombres complexes.

b) Déterminez le déphasage φ entre la tension totale et le courant total.

c) Comment est-ce qu'on voit dans le résultat du point b) que le courant est en retard par rapport à la tension?

**Exercice 14:**

Soit le circuit suivant:

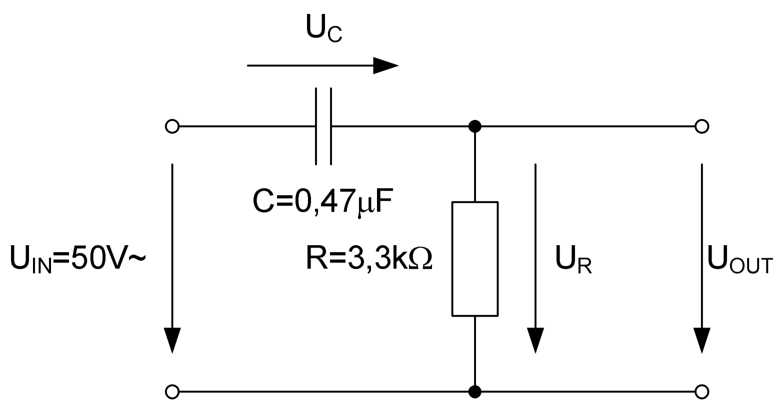



d) Calculez les tensions et courants complexes inconnus.

e) Déterminez le déphasage du courant total par rapport à la tension d'alimentation.

**Exercice 15:**

Soit le circuit suivant:




f) Calculez les valeurs de la tension de sortie à la fréquence 10Hz et 1kHz à l'aide des nombres complexes.

g) Décrivez à quoi ce circuit pourrait servir.

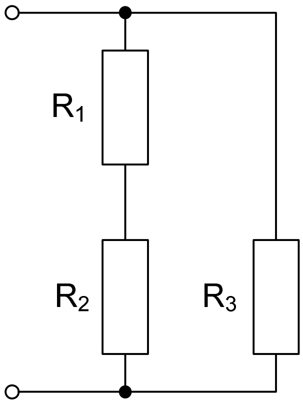
h) Déterminez le gain en tension du circuit à 10Hz et 1kHz.

## **Exercices supplémentaires:**

### **Exercice 16:**

Notez pour les circuits suivants la stratégie comment calculer la résistance totale $R_T$.

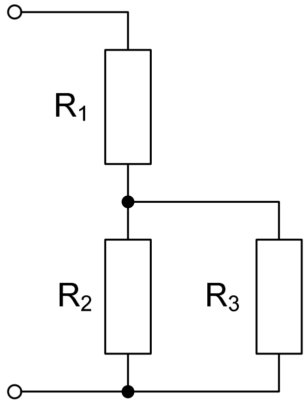
exemple:



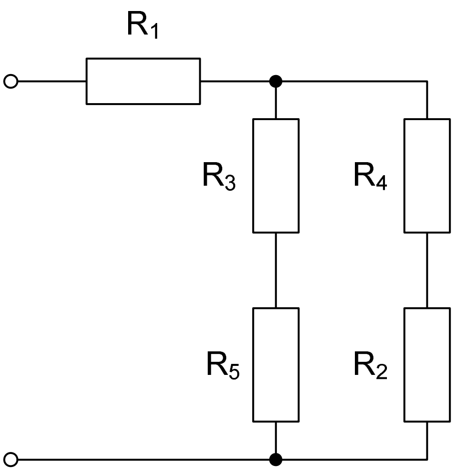

stratégie:

$R_{12} = R_1 + R_2$

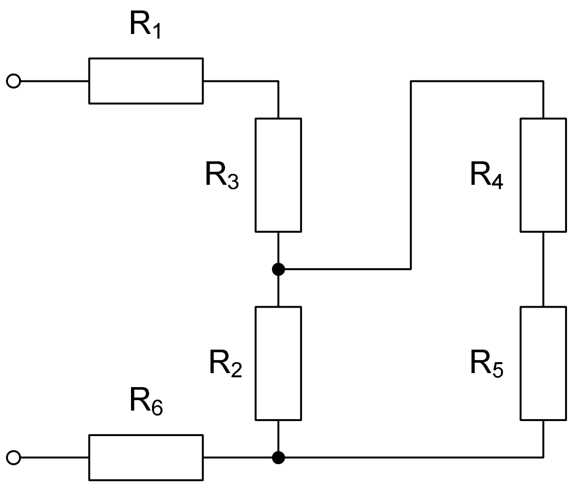
$R_T = R_{12} \,//\, R_3$




stratégie:



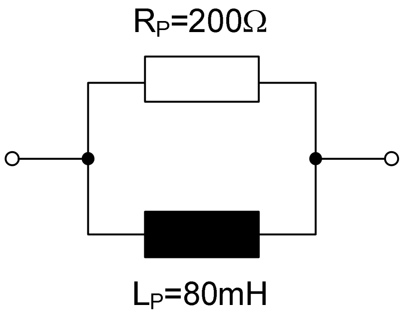

stratégie:

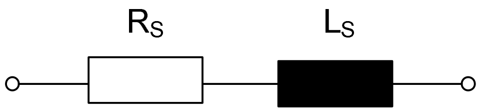



stratégie:

## Exercice 17:

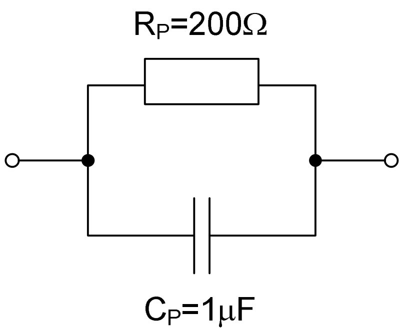
Calculez les valeurs de $R_S$ et $L_S$ de façon à ce que les deux circuits suivants se comportent de la même façon ($\underline{Z}_{TP} = \underline{Z}_{TS}$) à une fréquence de 1kHz. Il peut être utile de remplacer $R_P$ et $L_P$ assez tôt par les valeurs données.

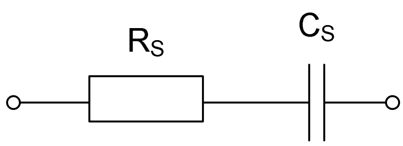



## Exercice 18:

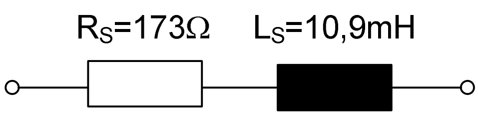
Calculez les valeurs de $R_S$ et $C_S$ de façon à ce que les deux circuits se comportent de la même façon ($\underline{Z}_{TP} = \underline{Z}_{TS}$) à une fréquence de 1kHz.

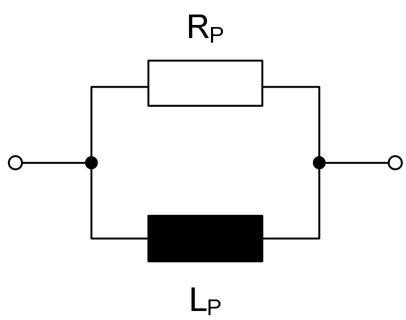



## Exercice 19:

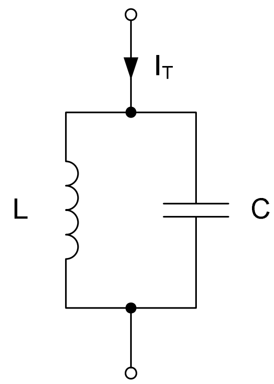
Développez les valeurs de $R_P$ et $L_P$ de façon à ce que les deux circuits suivants se comportent de la même façon ($\underline{Y}_{TS} = \underline{Y}_{TP}$) à une fréquence de 1kHz.



**Exercice 20:**

Soit le filtre LC suivant:

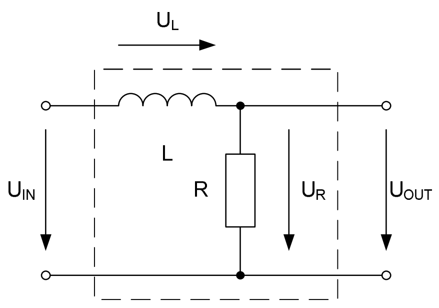



Montrez que $\underline{Z}_T$ devient infiniment grand si $f = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}$, quoique ni $X_L$ ni $X_C$ seront infiniment grand à cette fréquence. Réfléchissez d'abord sur la valeur de l'admittance totale si l'impédance totale est infiniment grande.

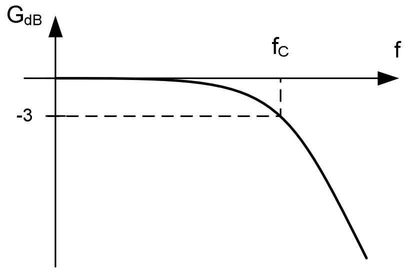
**Exercice 21:**

Le circuit, la courbe de réponse en fréquence et l'équation de la courbe d'un filtre RL passe-bas sont:

circuit:




courbe de réponse en fréquence:




équation de la courbe:

$$G_U(f) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

Développez l'équation de la courbe indiquez ci-dessus à l'aide de vos connaissances sur les nombres complexes sachant que:

- $\underline{G}_U = \frac{\underline{U}_{OUT}}{\underline{U}_{IN}}$
- $G_U = \sqrt{\mathrm{Re}^2(\underline{G}_U) + \mathrm{Im}^2(\underline{G}_U)}$

- Le circuit se comporte comme un diviseur de tension, donc le rapport des tensions complexes est égal au rapport des impédances complexes y relatifs.