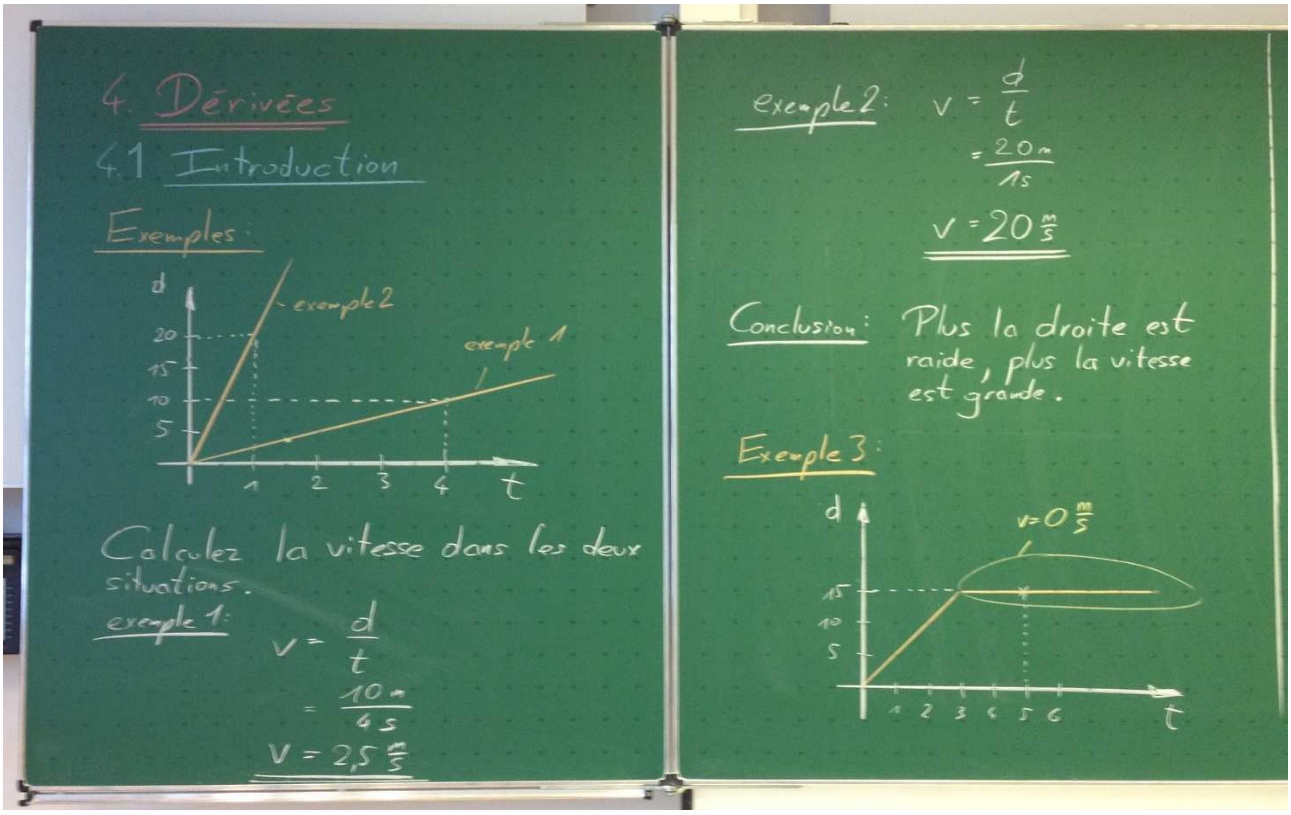
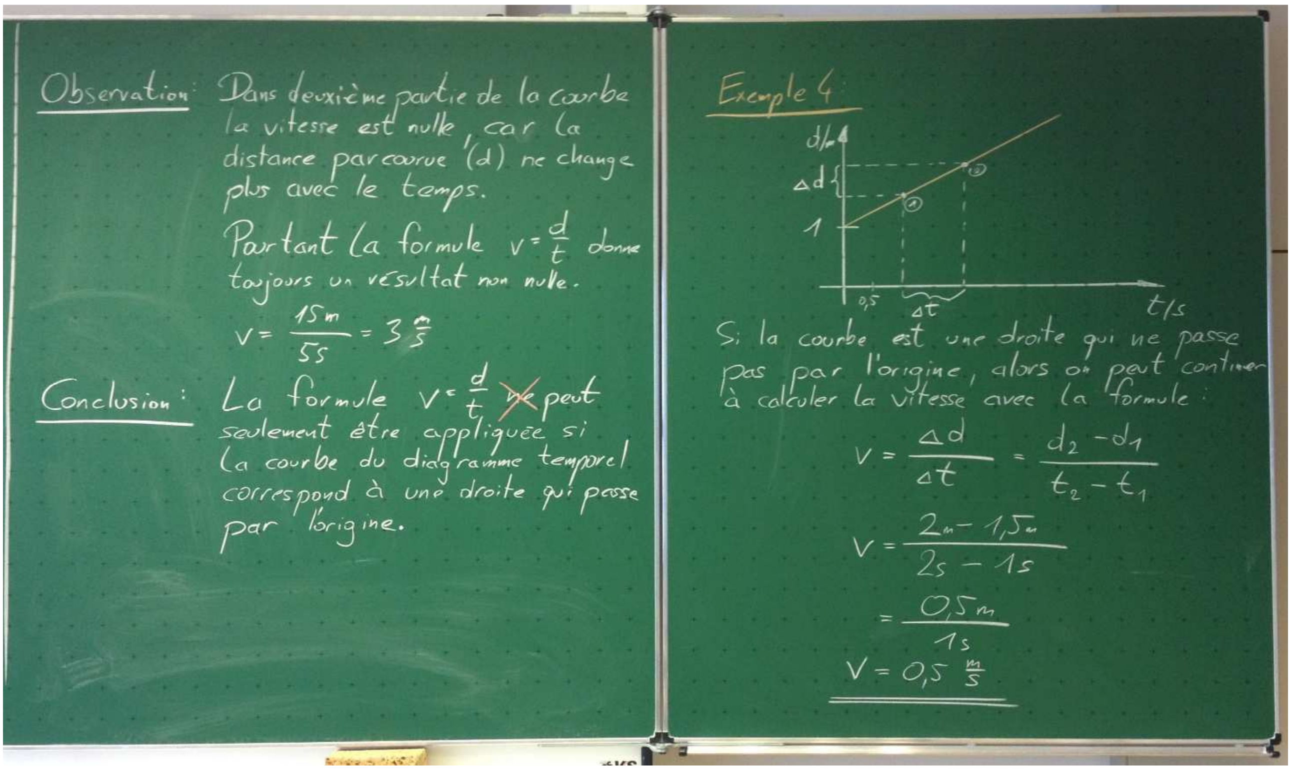
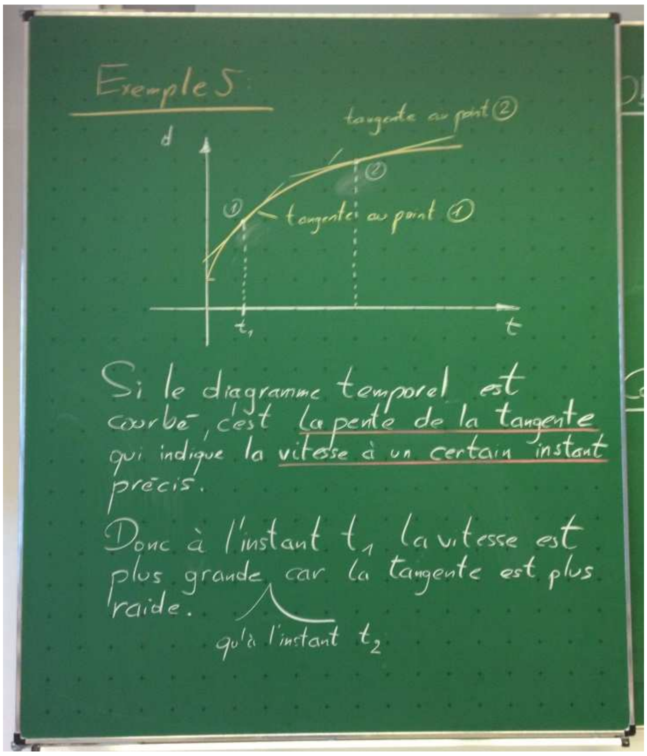
4. Dérivées

4.1 Introduction





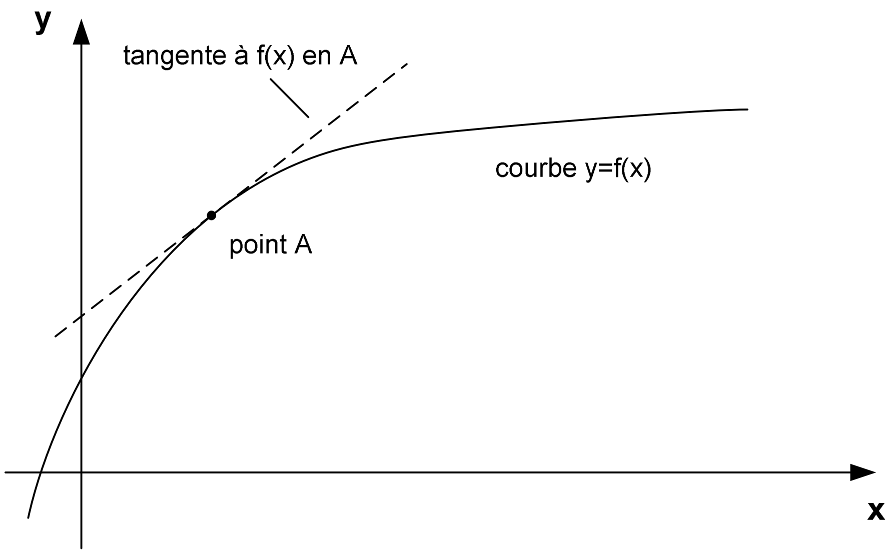

Exemple 5
tangente au point 2
tangente au point 1
d
t
t_1
Si le diagramme temporel est courbé, c'est la pente de la tangente qui indique la vitesse à un certain instant précis.
Donc à l'instant t_1 la vitesse est plus grande car la tangente est plus raide.
qu'à l'instant t_2

4.2 Tangente à une courbe en un point

Définition:

La tangente à une courbe en un point A est la droite qui touche la courbe seulement au point A dans les alentours de A.

Exemple:



Rappel:

Une droite peut être décrite par une équation du type $y=a\cdot x+b$ où:

- x et y sont les coordonnées des points de la droite,
- a est la pente de la droite,
- b est l'ordonnée à l'origine de la droite.

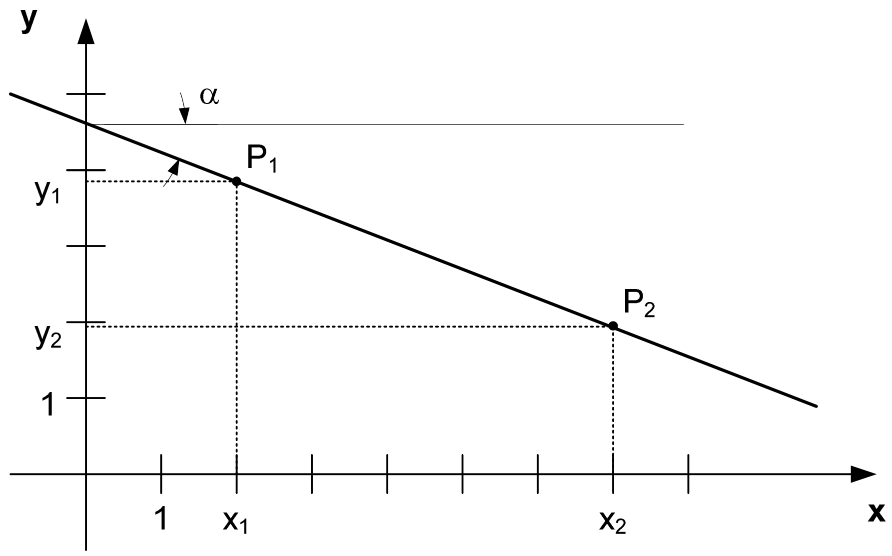
Il vaut:

$$\boxed{a = \tan(\alpha) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} \qquad \boxed{a(\%) = a \cdot 100\%}$$

- x_1 et y_1 sont les coordonnées d'un point quelconque de la droite
- x_2 et y_2 sont les coordonnées d'un autre point quelconque de la droite

Exercice 1:

Calculez la pente a de la droite suivante ainsi que l'angle α.

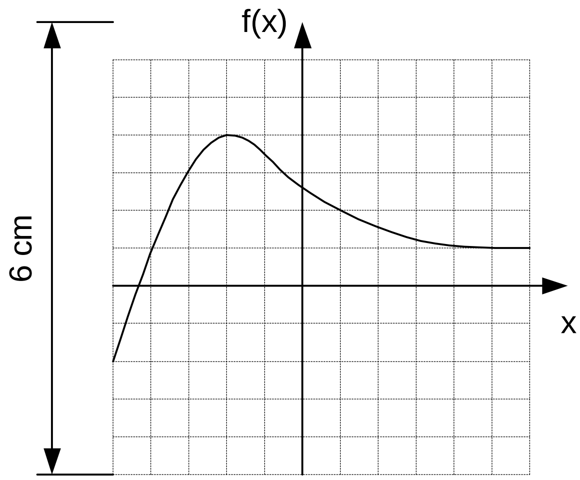

y
α
P1
y1
P2
y2
1
1
x1
x2
x

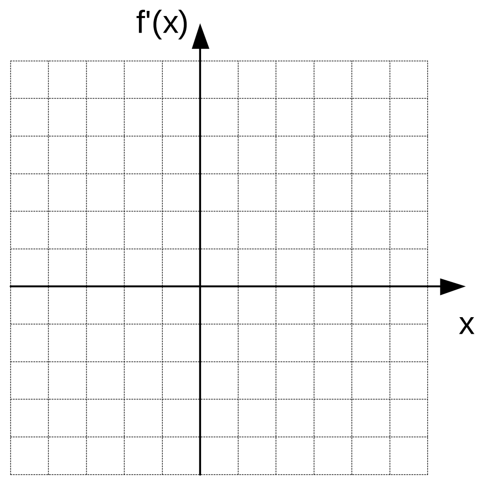
4.3 Définition de la fonction dérivée

La fonction dérivée f'(x) (ou y') est une fonction qui fournit la pente de la tangente à f(x) dans chacun de ses points.

Exercice 2:

Dessine qualitativement la fonction dérivée f'(x) de la fonction f(x) suivante:



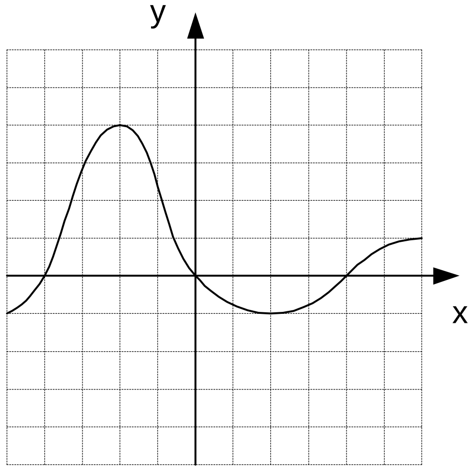


Rem.: Discuter brièvement les applications de la dérivée, voir chapitre IV.

1. min / max
2. $a = \frac{dv}{dt}$
3. http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/8a/World-pop-hist-de-2.png

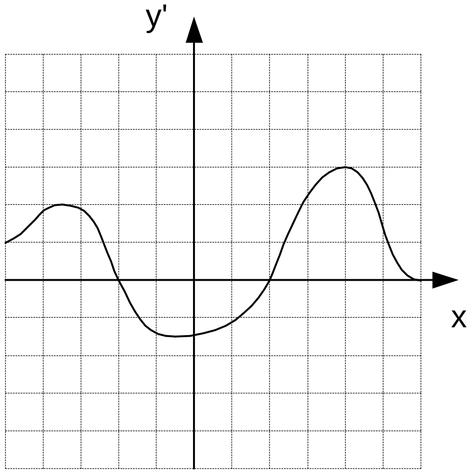
Exercice 3:

Quelle est la dérivée y' qui correspond le mieux à la fonction suivante?

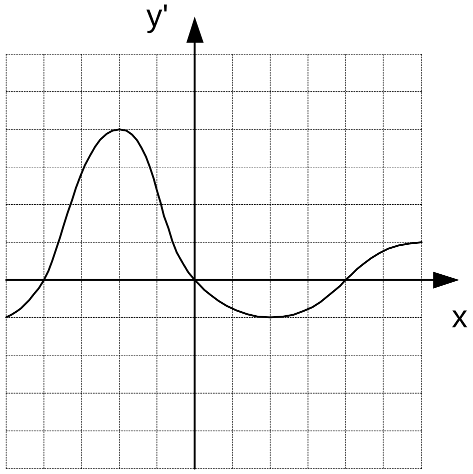


Dérivées:

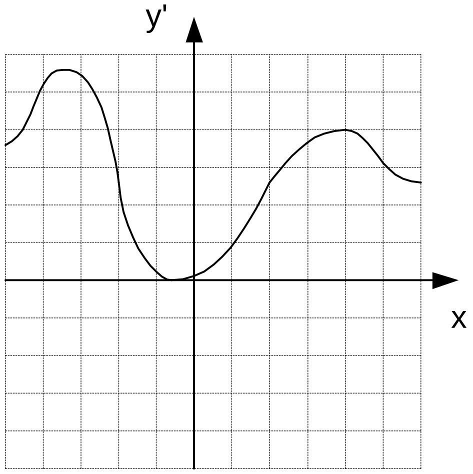
A



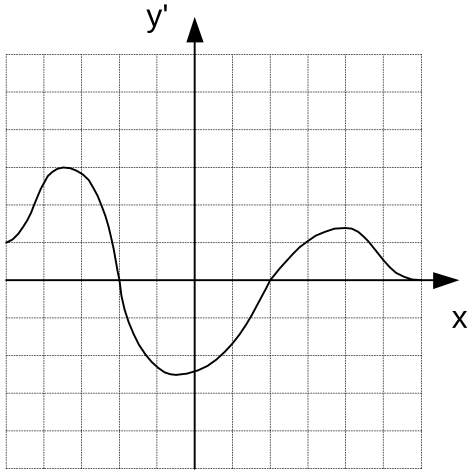
B



C

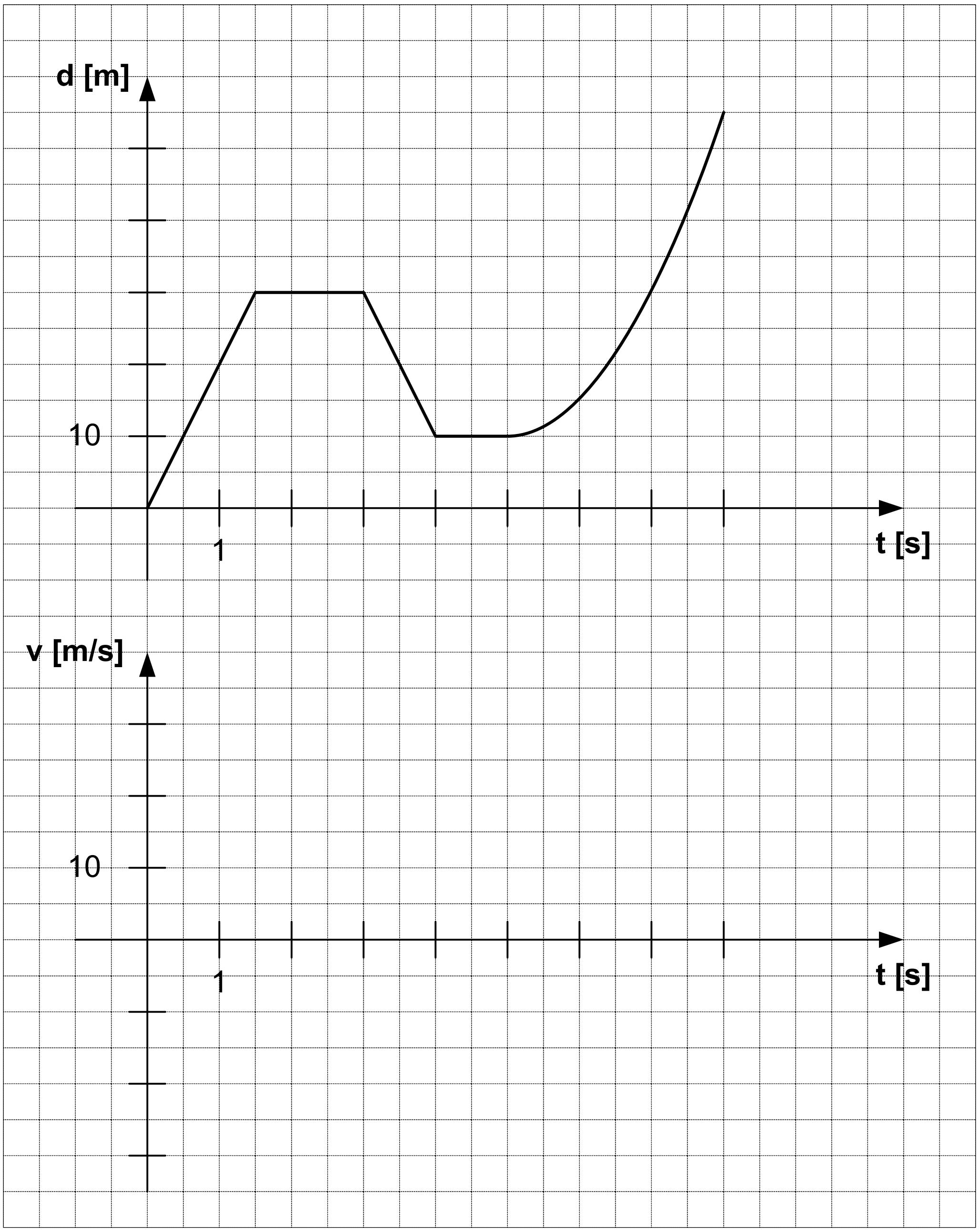


D



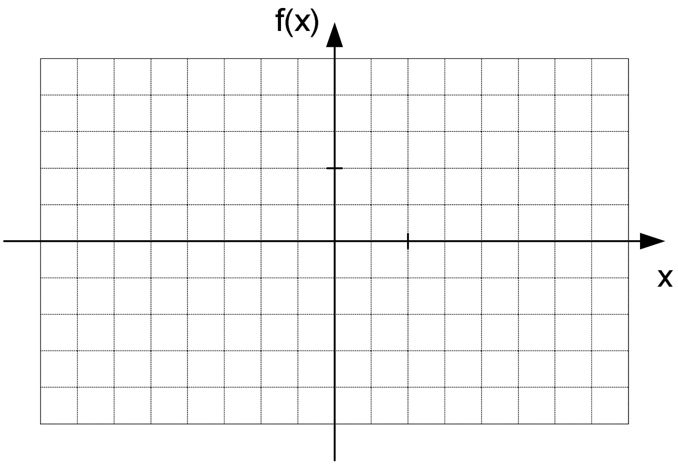
Exercice 4:

Tracez le diagramme temporel de la vitesse d'une voiture si le diagramme temporel du déplacement est comme suit.



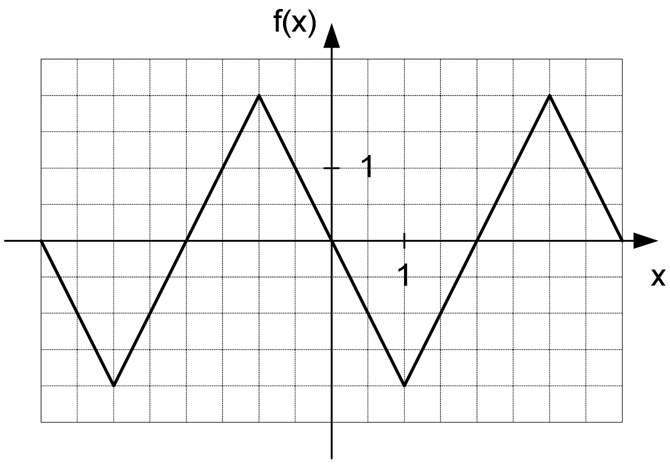
Exercice 5:

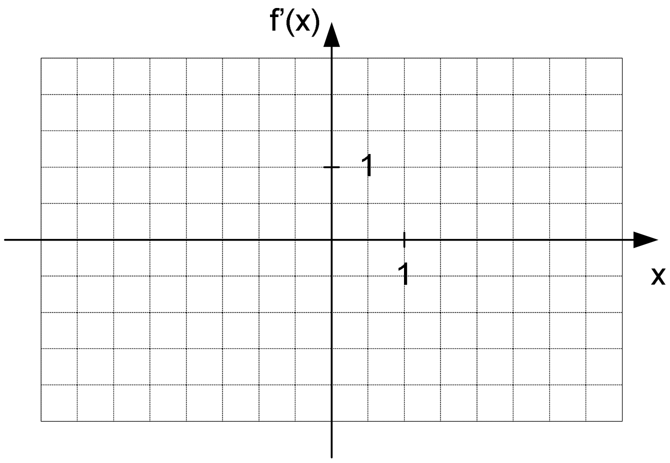
Tracez qualitativement la représentation graphique d'une fonction y=f(x) qui a comme fonction dérivée la courbe C de l'exercice 3 précédent.



Exercice 6:

Tracez la fonction dérivée f'(x) exacte de la fonction f(x).





4.4 Les limites

Exercice 7:

Quel sera le résultat du calcul suivant si x n'arrête pas de devenir de plus en plus petit tout en restant positif?

$$3 + x$$

Réponse: 3 + x = 3 si x n'arrête pas de devenir de plus en plus petit tout en restant positif.

Ce type d'exercice se note en mathématiques comme suit:

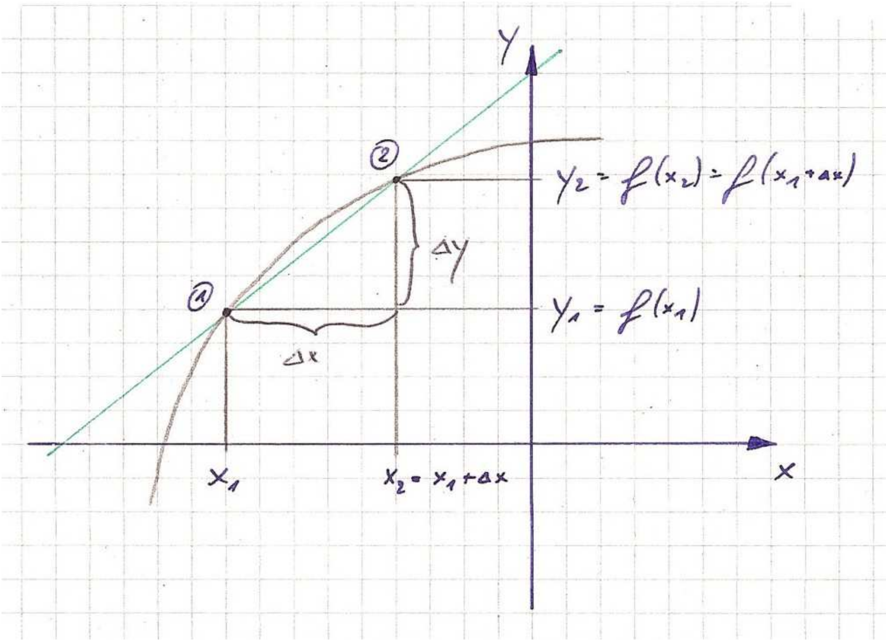
$$\lim_{x \to 0}(3+x) = 3$$

On lit: La limite de 3+x si x tend vers 0 est 3.

Exemples:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} =$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} =$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} =$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} =$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} =$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) =$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x =$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x =$

4.5 Calcul de la dérivée



$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

4.6 Calcul approximatif de la fonction dérivée à l'aide d'Excel

Si $x_2 - x_1$ est suffisamment petit, il vaut approximativement:

$$f'(x) \approx \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Exercice 8:

a) Etablissez en Excel un tableau de valeurs avec les trois colonnes suivantes:

a. x ($-5 \leq x \leq 5$ avec $\Delta x = 0{,}1$)

b. $y = x^2$

c. $y' = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

b) A partir du tableau établi au point 1 faites dresser en Excel une représentation graphique de y et y'.

c) Déterminez l'expression de la fonction dérivée y' à partir du graphique.

Exercice 9:

Déterminez par analyse du graphique les fonctions dérivées approximatives des fonctions suivantes:

f(x)	f'(x)
x	
2x	
5x	
. . .	
a·x	
x	
x^2	
x^3	
1	
2	
5	
. . .	
a	
sin(x)	
cos(x)	
e^x ou exp(x)	
ln x	

4.7 Résumé des fonctions dérivées usuels

A l'aide de la définition de la dérivée on peut démontrer que:

$$\boxed{(a)' = 0}$$

où a est une constante

$$\boxed{(x^n)' = n \cdot x^{n-1}}$$

$$\boxed{\left(\sin\left(x\right)\right)' = \cos\left(x\right)}$$

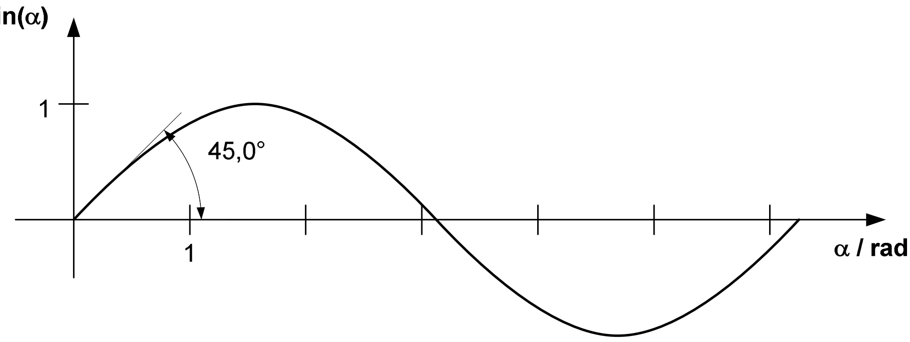
$$\boxed{\left(\cos\left(x\right)\right)' = -\sin\left(x\right)}$$

$$\boxed{\left(e^x\right)' = e^x}$$

$$\boxed{\left(\ln\left(x\right)\right)' = \frac{1}{x} \quad \text{si} \;\; x > 0}$$

Exercice 10:

Montrez que la fonction y=sin(α) part sous un angle de 45° de l'origine, si on utilise la même échelle sur l'axe des x que sur l'axe des y et si α est exprimé en radians.



Exercice 11:

Rappel: $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$

$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

Déterminez les fonctions dérivées des fonctions suivantes:

a) $y_1 = \frac{1}{x}$ $\qquad y'_1 = -\frac{1}{x^2}$

b) $y_2 = \frac{1}{x^2}$ $\qquad y'_2 = -\frac{2}{x^3}$

c) $y_3 = \sqrt{x}$ $\qquad y'_3 = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

d) $y_4 = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ $\qquad y'_4 = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$

e) $y_5 = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ $\qquad y'_5 = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$

4.8 Opérations sur les fonctions dérivables

$$\text{①} \quad (a \cdot f)' = a \cdot f'$$

où a est une constante

Exemple:

$$\begin{aligned} y &= 5x^3 \\ y' &= \left(5x^3\right)' \\ &= 5 \cdot \left(x^3\right)' \\ &= 5 \cdot 3x^2 \\ y' &= 15x^2 \end{aligned}$$

$$\text{②} \quad (f+g)' = f' + g'$$

Exemple:

$$\begin{aligned} y &= 5x^7 + 3x^2 + 5 \\ y' &= \left(5x^7 + 3x^2 + 5\right)' \\ &= \left(5x^7\right)' + \left(3x^2\right)' + (5)' \\ &= 35x^6 + 6x + 0 \\ y' &= 35x^6 + 6x \end{aligned}$$

$$③ \quad (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Exemple:

$$\begin{aligned}
y &= x^2 \cdot (5x+1) \\
y' &= \left[x^2 \cdot (5x+1)\right]' \\
&= \left(x^2\right)' \cdot (5x+1) + x^2 \cdot (5x+1)' \\
&= 2x \cdot (5x+1) + x^2 \cdot 5 \\
&= 10x^2 + 2x + 5x^2 \\
y' &= 15x^2 + 2x
\end{aligned}$$

alternative:

$$\begin{aligned}
y &= x^2 \cdot (5x+1) \\
y &= 5x^3 + x^2 \\
y' &= \left[5x^3 + x^2\right]' \\
y' &= 15x^2 + 2x
\end{aligned}$$

$$④ \quad \left(\frac{1}{f}\right)' = \left(-\frac{f'}{f^2}\right)$$

Exemple:

$$\begin{aligned}
y &= \frac{2}{\sin(x)} \\
y' &= 2 \cdot \left(\frac{1}{\sin(x)}\right)' \\
&= -2\frac{(\sin(x))'}{\sin^2 x} \\
y' &= -\frac{2 \cdot \cos(x)}{\sin^2 x}
\end{aligned}$$

$$⑤ \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \left(\frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}\right)$$

Exemple:

$$y = \tan(x)$$

$$y = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$y' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)'$$

$$= \frac{(\sin(x))'\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot(\cos(x))'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \qquad \text{avec} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\underline{\underline{y' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \left(= 1 + \tan^2 x\right)}}$$

Exercice 12:

Déterminez les dérivées des fonctions suivantes:

a) $y = x^2 - 2x + 1$

b) $y = \dfrac{1}{x+1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2}{x}$ $\qquad f'(x) = 2x - 2 - \dfrac{2}{x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{x-9}{x-3}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{6}{(x-3)^2}$

e) $y = -\dfrac{x^2 - 6}{x^2 - 2}$ $\qquad y' = -\dfrac{8x}{(x^2-2)^2}$

f) $y = \dfrac{x^4}{x}$ $\qquad y' = 3x^2$

g) $y = x \cdot \cos(x)$ $\qquad y' = \cos x - x \cdot \sin x$

h) $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$ $\qquad f'(x) = 3x^2 + 12x + 11$

i) $v = -\dfrac{1}{20} r^2 + 5$ $\qquad v' = -\dfrac{r}{10}$

j) $y = \dfrac{x^2 - x + 7}{2 - x}$ $\qquad y' = -\dfrac{x^2 + 4x + 5}{(2-x)^2}$

k) $y = x \cdot \dfrac{(1-x)x}{x^2 - x - 1}$ $\qquad y' = -\dfrac{x(x^3 - 2x^2 - 2x + 2)}{(x^2 - x - 1)^2}$

l) $y = \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+2)(x-4)}$ $\qquad y' = -\dfrac{10(x-1)}{(x^2 - 2x - 8)^2}$

m) $f(x) = \dfrac{5}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ $\qquad f'(x) = -\dfrac{5(3x^2 - 12x + 11)}{(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)^2}$

n) $y = x^n + bx$

o) $f(x) = -\dfrac{1}{2x+1}$ $\qquad f'(x) = +\dfrac{2}{(2x+1)^2}$

$$⑥ \quad \left(g\left[f(x)\right]\right)' = g'\left[\left(f(x)\right)\right]\cdot f'(x)$$

On retient:

Si deux fonctions sont encastrées l'une dans l'autre on dérive d'abord la fonction externe et on multiplie le résultat avec la dérivé de la fonction interne.

Exemples:

$$y = \left(x^2+3\right)^7$$

$$g(x) = \left(\ \right)^7 \qquad g'(x) = 7\cdot\left(\ \right)^6$$

$$f(x) = x^2+3 \qquad f'(x) = 2x$$

$$y' = \left[\left(x^2+3\right)^7\right]'$$

$$y' = 7\cdot\left(x^2+3\right)^6\cdot 2x$$

$$\underline{\underline{y' = 14x\cdot\left(x^2+3\right)^6}}$$

$$y = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$g(x) = \cos\left(\ \right) \quad g'(x) = -\sin\left(\ \right)$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$y' = \left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]'$$

$$y' = -\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cdot-\frac{1}{x^2}$$

$$\underline{\underline{y' = \frac{1}{x^2}\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)}}$$

Exercice 13:

a) $m = (R^2 - 1)^2$ $\qquad m' = 4R(R^2 - 1)$

b) $y = (2 - x^2)^3$ $\qquad y' = -6x(2 - x^2)^2$

c) $y = \sqrt{4x^2 - 4}$ $\qquad y' = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

d) $u(t) = 2V \cdot \sin(2\pi 50Hz \cdot t)$

e) $y = e^{\sin(\cos x)}$

4.9 Applications de la dérivée

4.9.1 Démonstration du déphasage entre tension et courant sur un condensateur

La notation de Leibniz:

Leibniz a introduit une autre notation pour la dérivée. Il note $\frac{dy}{dx}$ au lieu de f'(x).

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Introduction:

Si la quantité de charge Q transporté à travers un composant varie d'une façon linéaire avec le temps il vaut:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

D'une façon générale il vaut:

$$i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

L'intensité d'un courant est donc la dérivée de la charge par rapport au temps.

Démonstration:

Pour un condensateur il vaut:

$$\begin{aligned} Q &= C \cdot U_C \\ \Delta Q &= C \cdot \Delta U_C \\ \frac{\Delta Q}{\Delta t} &= C \cdot \frac{\Delta U_C}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} &= C \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta U_C}{\Delta t} \\ \frac{dQ}{dt} &= C \cdot \frac{du_C}{dt} \end{aligned}$$

$$\boxed{i_C(t) = C \cdot \frac{du_C}{dt}}$$

Ceci veut donc dire que la valeur instantanée du courant $i_C(t)$ à travers un condensateur est égale à la capacité C multipliée avec la dérivée de la tension par rapport au temps.

Exemple:

$$u_C(t) = \hat{u} \cdot \sin(2\pi ft)$$

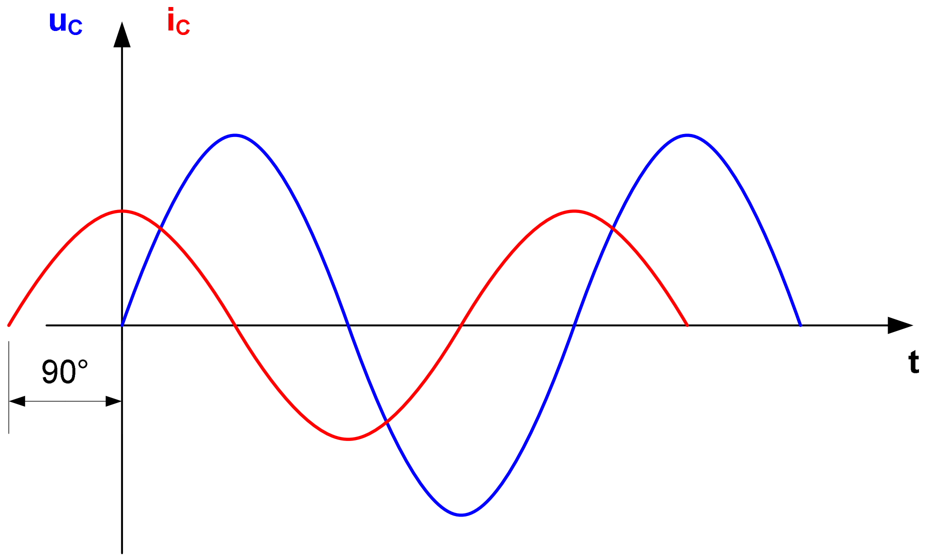
$$\frac{du_c}{dt} = \hat{u} \cdot \cos(2\pi ft) \cdot 2\pi f$$

sans démonstration

$$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C}{dt}$$

$$= C \cdot \hat{u}_C \cdot \cos(2\pi ft) \cdot 2\pi f$$

$$i_C(t) = \hat{u}_C 2\pi fC \cdot \cos(2\pi ft)$$



Le courant $i_C(t)$ est de 90° en avance par rapport à la tension **si u_C(t) est sinusoïdale**.

Maintenant on peut aussi facilement démontrer la formule pour la réactance capacitive X_C:

$$X_C = \frac{\hat{u}_C}{\hat{\imath}_C}$$

Rappel: $i_C(t) = \hat{u} 2\pi fC \cdot \cos(2\pi ft)$

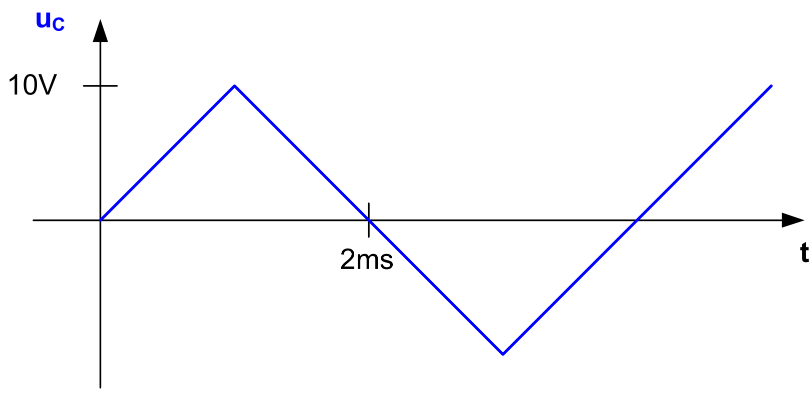
donc: $\hat{\imath}_c = \hat{u} 2\pi fC$

$$X_C = \frac{\hat{u}_C}{\hat{u}_C 2\pi fC}$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC}$$

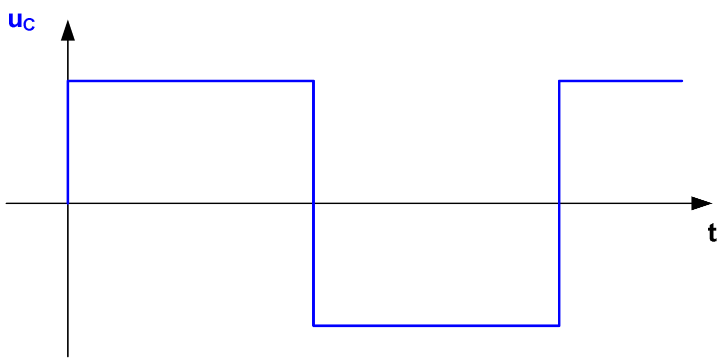
Exercice 14:

Tracez le diagramme temporel exact de $i_C(t)$ si on applique la tension $u_C(t)$ suivante sur un condensateur avec C=100µF:



Exercice 15:

Tracez le diagramme temporel qualitatif de $i_C(t)$ si on applique la tension $u_C(t)$ suivante sur un condensateur:



Exercice 16:

Pour la tension induite dans une bobine il vaut:

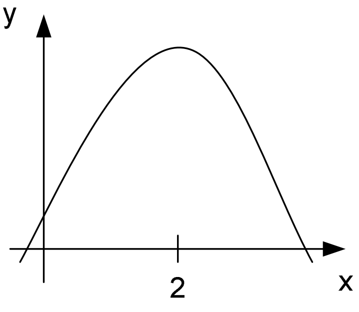
$$u(t) = -\frac{d\Phi}{dt}$$

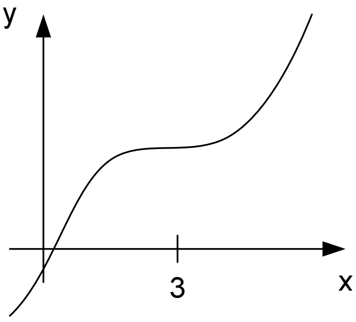
a) Quelle doit être la forme de la fonction Φ=f(t) pour que la tension induite devienne sinusoïdale.

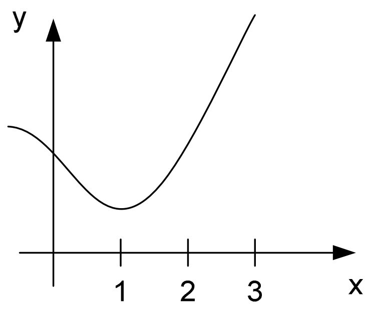
b) De quelle forme serait le diagramme temporel de la tension induite si le flux changeait d'une façon triangulaire.

4.9.2 Recherche d'extrémums locaux et optimisation

Introduction:







x	-∞	2	+∞
y'			

x	-∞	3	+∞
y'			

x	-∞	1	+∞
y'			

Résumé:

La dérivée d'une fonction s'annule dans les points où la fonction a un maximum, un minimum ou un palier.
Seulement dans les minimas et les maximas locaux la dérivée va changer de signe autour de ces points.

Exercice 17:

Montrez que la fonction $y=x^3$ n'a ni de minimum local ni de maximum local.

Exercice 18:

Déterminez par calcul les abscisses (=coordonnée x) des maximums et des minimums locaux de la fonction $y=x^3-2x^2-3x+4$.

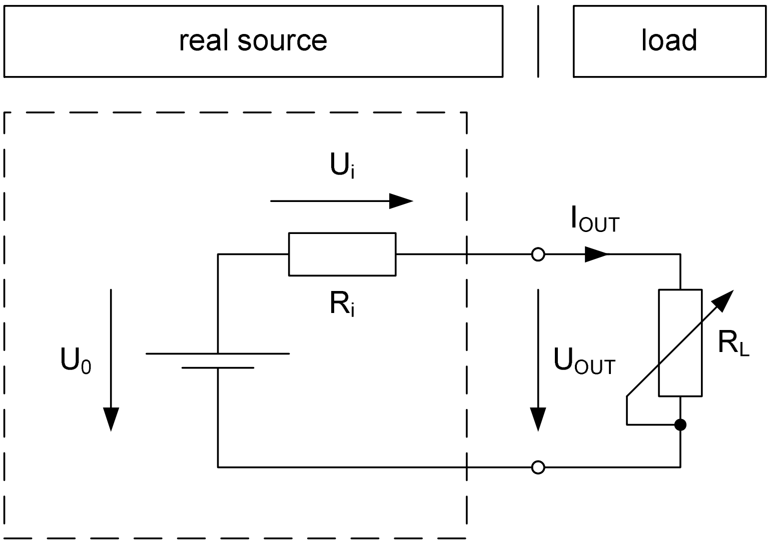
Exercice 19:

Déterminez par calcul les abscisses (=coordonnée x) des maximums et des minimums locaux de la fonction $y=-x^3+x^2+x$.

Exercice 20:

Déterminez par calcul les abscisses (=coordonnée x) des maximums et des minimums locaux de la fonction $y = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 5$.

Exercice 21:



Soit une source réelle chargée par une résistance ohmique variable. U_0=10V R_I=5Ω.

a) Déterminez la fonction $P_{OUT}=f(R_L)$.

b) Déterminez la valeur de la résistance R_L pour laquelle la puissance P_{OUT} va être maximale.

c) Déterminez la valeur de la résistance R_L pour laquelle la puissance P_{OUT} va être maximale pour une tension à vide quelconque et une résistance interne quelconque.

Exercice 22:

Déterminez la vitesse optimale d'une colonne de voitures pour maximiser le débit des voitures D si toutes les voitures respectent entre eux la distance de réaction d_R plus la distance de freinage d_F.

distance de réaction = distance parcourue dans 1 sec.

$$d_F \approx \frac{v^2}{16\frac{m}{s^2}}$$

solution Exercice 21:

$$P_{OUT} = \frac{{U_{OUT}}^2}{R_L} \qquad \frac{U_{OUT}}{U_0} = \frac{R_L}{R_I + R_L}$$

$$P_{OUT} = \frac{{U_{OUT}}^2}{R_L} \qquad U_{OUT} = U_0 \cdot \frac{R_L}{R_I + R_L}$$

$$P_{OUT} = \frac{{U_0}^2 \cdot R_L}{(R_I + R_L)^2}$$

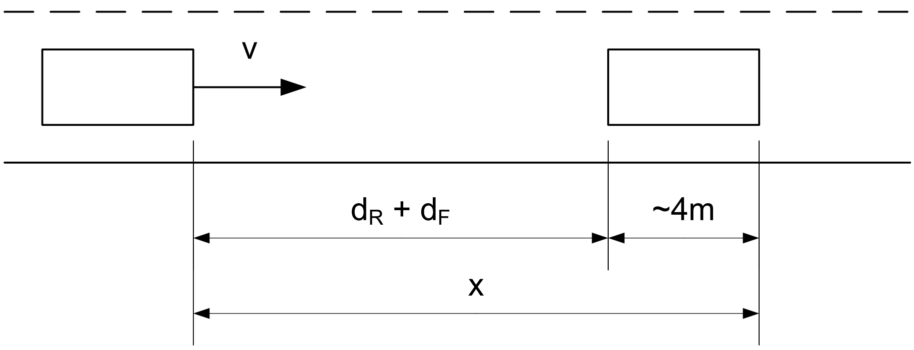
$$\frac{dP_{OUT}}{dR_L} = \frac{{U_0}^2 \cdot (R_I + R_L)^2 - {U_0}^2 \cdot R_L \cdot 2 \cdot (R_I + R_L)}{(R_I + R_L)^4}$$

$$\frac{dP_{OUT}}{dR_L} = {U_0}^2 \cdot (R_I + R_L) \cdot \frac{(R_I + R_L) - R_L \cdot 2}{(R_I + R_L)^4}$$

$$\frac{dP_{OUT}}{dR_L} = {U_0}^2 \cdot \frac{R_I - R_L}{(R_I + R_L)^3}$$

$$\frac{dP_{OUT}}{dR_L} = 0 \Leftrightarrow R_I = R_L$$

solution Exercice 22:



$$d_R = v \cdot t = v \text{ (si on ignore l'unité)}$$

$$d_F = \frac{v^2}{16} \text{ (si on ignore l'unité)}$$

$$x = \frac{v^2}{16} + v + 4$$

$$t = \frac{x}{v} = \frac{\frac{v^2}{16} + v + 4}{v} = \frac{v}{16} + 1 + \frac{4}{v} = \frac{v^2 + 16v + 64}{16v}$$

$$D = \frac{1}{t} = \frac{16v}{v^2 + 16v + 64}$$

$$D' = \frac{-16(-8 + v)}{(8 + v)^3}$$

$$D' = 0 \Leftrightarrow v = 8\frac{m}{s} \approx 30\frac{km}{h}$$