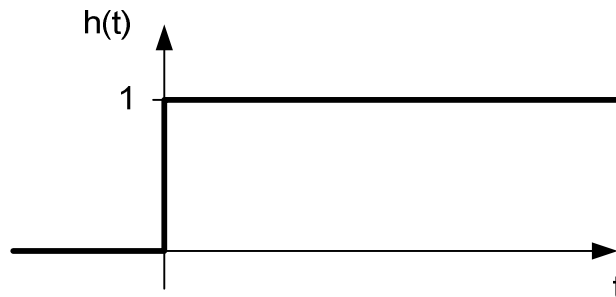


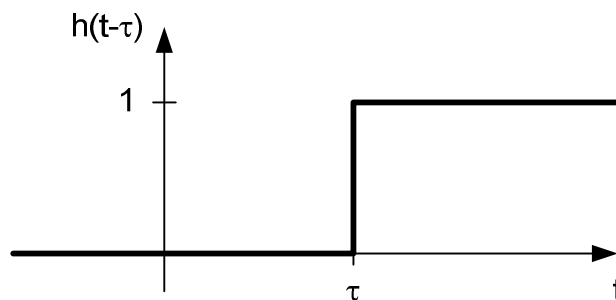
## Analoge Signale und Systeme im Zeit- und Frequenzbereich

### 1. Zeitbereich

#### 1.1 Die Sprungfunktion $h(t)$



Eine um die Zeit  $\tau$  zeitverschobene Sprungfunktion schreibt sich also  $h(t-\tau)$ .



#### 1.2 Der Dirac-Impuls $\delta(t)$

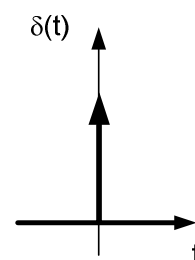
Für den Dirac-Impuls  $\delta(t)$  auch Deltaimpuls oder Impulsfunktion genannt gilt:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{für } t \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\delta(t) = \dot{h}(t)$$

graphische Darstellung:



### 1.3 Ausblendeigenschaft des Dirac-Impulses

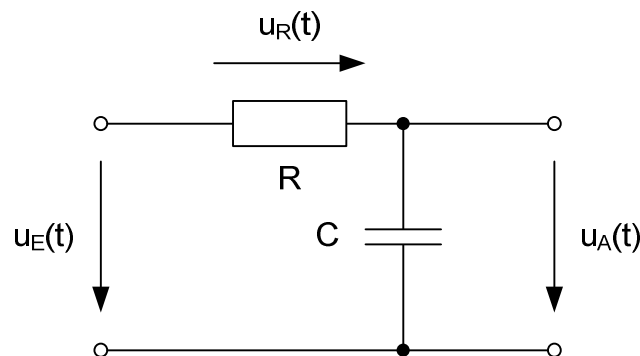
(siehe S.23 [Heinlein 1991])

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot \delta(\tau - t_0) d\tau &= \int_{t^-}^{t^+} f(\tau) \cdot \delta(\tau - t_0) d\tau \\ &= f(t_0) \cdot \int_{t^-}^{t^+} \delta(\tau - t_0) d\tau \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot \delta(\tau - t_0) d\tau &= f(t_0) \end{aligned}$$

### 1.4 Impulsantwort

Die Impulsantwort  $w(t)$  ist wie der Name es sagt das Ausgangssignal einer Schaltung wenn das Eingangssignal ein Dirac-Impuls ist. Alle Energiespeicher der Schaltung müssen aber vor dem Einsetzen des Impulses leer sein.

#### Impulsantwort am Beispiel eines RC-Tiefpass:



Für diese Schaltung gilt allgemein:

$$\begin{aligned} u_E &= u_R + u_A \\ u_E &= R \cdot i + u_A \quad \text{mit} \quad i = C \cdot \dot{u}_A \\ u_E &= R \cdot C \cdot \dot{u}_A + u_A \quad (1) \end{aligned}$$

Da die Ordnung der Erregung ( $m=0$ ) kleiner ist als die des Netzwerk ( $n=1$ ) kann man für die Impulsantwort  $w(t)$  ansetzen:

$$w(t) = K \cdot e^{-st} \cdot h(t) \quad (2) \quad (\text{siehe auch S.159 [Heinlein 1991]})$$

$K$  und  $s$  sind Parameter die durch Einsetzen von Gleichung (2) in (1) bestimmt werden können.

mit:  $u_E = \delta(t)$

$$u_A = w(t) = K \cdot e^{-st} \cdot h(t)$$

$$\dot{u}_A = K \cdot -s \cdot e^{-st} \cdot h(t) + K \cdot e^{-st} \cdot \delta(t)$$

folgt:

$$\delta(t) = R \cdot C \cdot [K \cdot -s \cdot e^{-st} \cdot h(t) + K \cdot e^{-st} \cdot \delta(t)] + K \cdot e^{-st} \cdot h(t)$$

$$\delta(t) = RC \cdot K \cdot -s \cdot e^{-st} \cdot h(t) + RC \cdot K \cdot e^{-st} \cdot \delta(t) + K \cdot e^{-st} \cdot h(t)$$

$$0 = RC \cdot K \cdot -s \cdot e^{-st} \cdot h(t) + K \cdot e^{-st} \cdot h(t) + RC \cdot K \cdot e^{-st} \cdot \delta(t) - \delta(t)$$

$$0 = [RC \cdot K \cdot -s + K] \cdot e^{-st} \cdot h(t) + RC \cdot K \cdot e^{-s0} \cdot \delta(t) - \delta(t)$$

$$0 = [RC \cdot K \cdot -s + K] \cdot e^{-st} \cdot h(t) + RC \cdot K \cdot 1 \cdot \delta(t) - \delta(t)$$

$$0 = [RC \cdot K \cdot -s + K] \cdot e^{-st} \cdot h(t) + [RC \cdot K - 1] \cdot \delta(t)$$

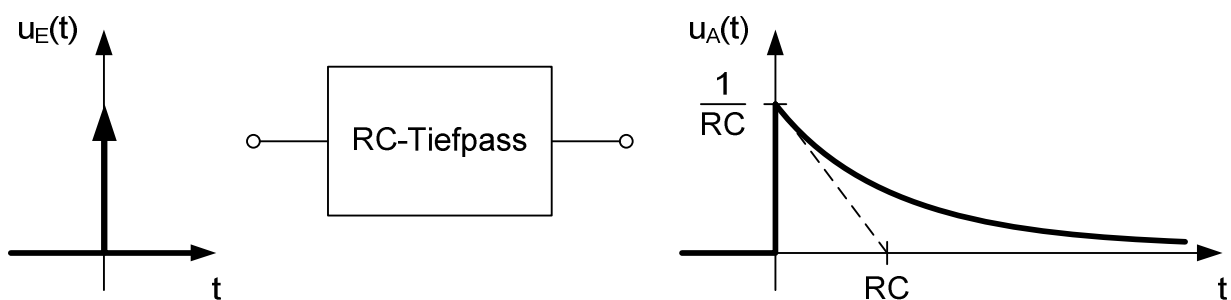
$$\Leftrightarrow \begin{cases} RC \cdot K \cdot -s + K = 0 & (3) \\ RC \cdot K - 1 = 0 & (4) \end{cases}$$

aus (4) folgt:  $K = \frac{1}{RC}$  (5)

mit (5) in (3) folgt:  $s = \frac{1}{RC}$

Für die Impulsantwort eines RC-Tiefpass gilt also:

$$w(t) = \frac{1}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \cdot h(t)$$



### 1.5 Von der Impulsantwort zur Faltung

Mit Hilfe der Impulsantwort kann man die Antwort eines linearen zeitinvarianten Netzwerks (engl.: LTI-System) auf eine beliebige Erregung berechnen. Die Idee dabei besteht darin, dass man die Erregung in eine Folge von zeitverschobenen und gewichteten Dirac-Impulsen zerlegt.

Jeder Dirac-Impuls hat eine entsprechende zeitverschobene und gewichtete Impulsantwort zur Folge. Addiert man alle Impulsantworten zusammen, so erhält man die gesuchte Antwort.

Die formal korrekte Entwicklung der Berechnungsformel der Antwort auf eine beliebige Erregung findet man ab Seite 223 in [Heinlein 1991]. Sie folgt folgender Logik:

Erregung	Antwort
$\delta(t)$	$w(t)$
$A \cdot \delta(t)$	$A \cdot w(t)$
$A \cdot \delta(t-\tau)$	$A \cdot w(t-\tau)$
$dA(\tau) \cdot \delta(t-\tau)$	$dA(\tau) \cdot w(t-\tau)$
$d\tau \cdot x(\tau) \cdot \delta(t-\tau)$	$d\tau \cdot x(\tau) \cdot w(t-\tau)$
$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \cdot x(\tau) \cdot \delta(t-\tau)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \cdot x(\tau) \cdot w(t-\tau)$

Da die letzte Erregung nichts anderes ist als  $x(t)$ , also ein beliebiges Eingangssignal, muss das

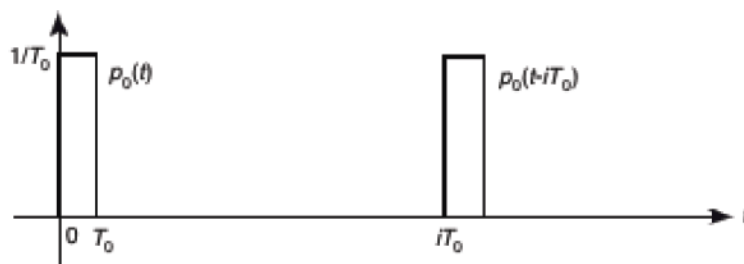
Integral  $\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \cdot x(\tau) \cdot w(t-\tau)$  die Nullzustandsantwort  $y_{NZ}(t)$  auf diese beliebige Erregung sein.

Dieses Integral ist also die Berechnungsvorschrift zur Herleitung der Nullzustandsantwort  $y_{NZ}(t)$  eines durch die Impulsantwort  $w(t)$  charakterisierten linearen zeitinvarianten Netzwerks auf eine beliebige Erregung  $x(t)$ . Diese Berechnungsformel wird auch **Faltungsintegral** genannt.

$$y_{NZ}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot w(t-\tau) \cdot d\tau$$

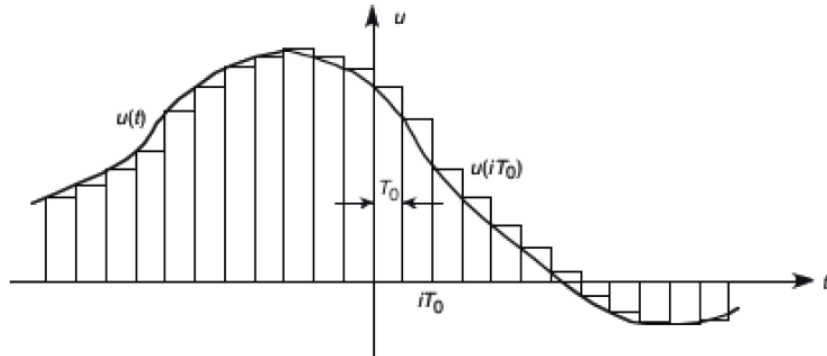
Das Faltungsintegral lässt sich auch anschaulicher aus folgender Überlegung herleiten (ab Seite 7 [Gysel 2004]):

Zunächst führen wir dazu den p-Impuls  $p_0(t)$  ein. Er hat die Dauer  $T_0$  und die Höhe  $1/T_0$ . Somit ist seine Wirkungsfläche 1.



Ein um die Zeit  $i \cdot T_0$  verzögerter  $p$ -Impuls schreibt sich also  $p_0(t-iT_0)$ .

Nun wollen wir das Eingangssignal  $u(t)$  eines LTI-Netzwerks durch eine Serie gewichteter  $p$ -Impulse annähern.



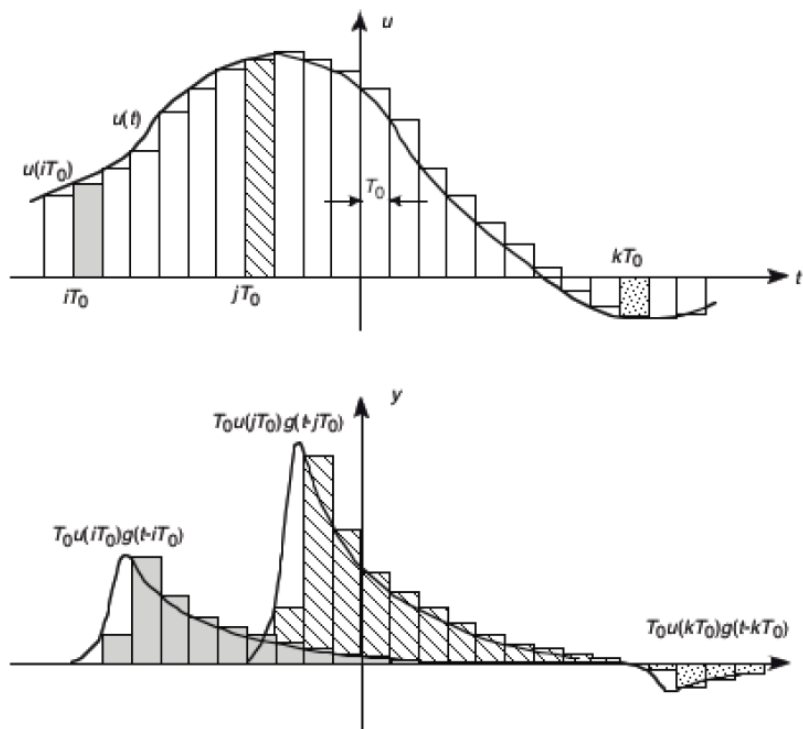
Jeder Rechteckimpuls lässt sich wie folgt beschreiben:

$$p_0(t-iT_0) \cdot u(iT_0) \cdot T_0$$

$u(iT_0) \cdot T_0$  entspricht dabei der Fläche des Rechteckimpulses. Das gesamte Signal  $u(t)$  lässt sich nun annähernd folgendermaßen beschreiben:

$$u_{\text{APPROX}}(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} p_0(t-iT_0) \cdot u(iT_0) \cdot T_0$$

Jeder  $p$ -Impuls  $p_0(t-iT_0)$  ruft eine  $p$ -Impulsantwort  $g(t-iT_0)$  hervor.



Wegen der Zeitinvarianz und der Linearität des Systems muss also die angenäherte Antwort  $y_{\text{APPROX}}(t)$  des Systems auf die Erregung  $u(t)$  wie folgt lauten:

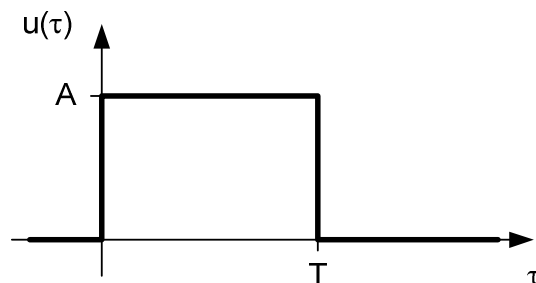
$$y_{\text{APPROX}}(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} g(t - iT_0) \cdot u(iT_0) \cdot T_0$$

Diese Approximation ist umso genauer, je kleiner wir die Impulsbreite  $T_0$  wählen. Im Grenzfall wird die Impulsbreite  $T_0$  zum infinitesimalen Zeitabschnitt  $d\tau$ , der Zeitpunkt  $i \cdot T_0$  wird zu  $\tau$ , die  $p$ -Impulsantwort  $g(t - iT_0)$  wird zur Impulsantwort  $w(t - \tau)$  und aus der Summe wird das Integral. Somit erhalten wir wieder das **Faltungsintegral**:

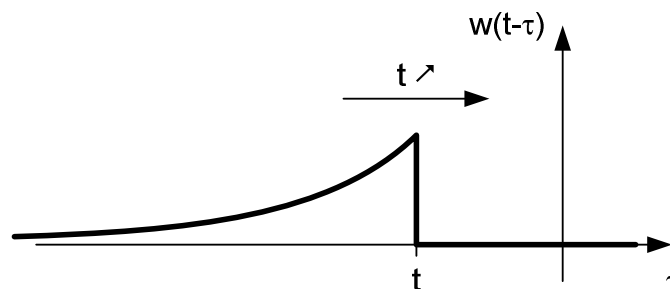
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t - \tau) \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

### Berechnung der Antwort eines RC-Tiefpass auf einen Rechteckimpuls mit Hilfe des Faltungsintegrals

Zunächst ist es sinnvoll sich die Komponenten des Faltungsintegrals zu veranschaulichen. Das Signal  $u(\tau)$  ist das Eingangssignal, in diesem Beispiel ein Rechteckimpuls der Höhe  $A$  und der Dauer  $T$ .

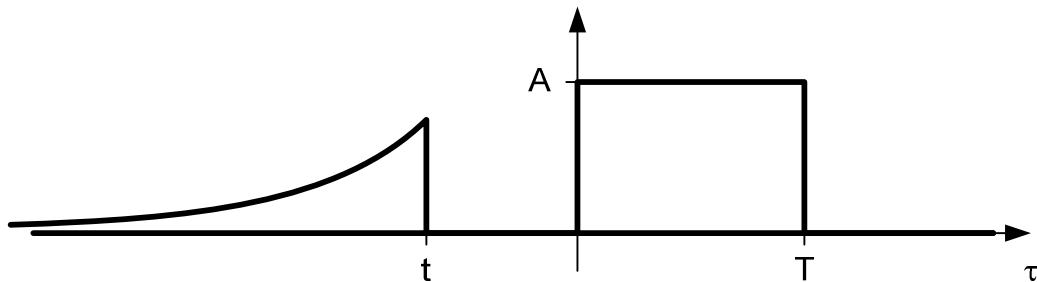


Das Signal  $w(t - \tau)$  ist die um die  $y$ -Achse gespiegelt Impulsantwort welche sich in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  verschiebt. Mit zunehmender Zeit  $t$  wandert die gespiegelte Impulsantwort von links nach rechts.



In Abhängigkeit von der Zeit  $t$  ergeben sich bei diesem Beispiel drei Phasen.

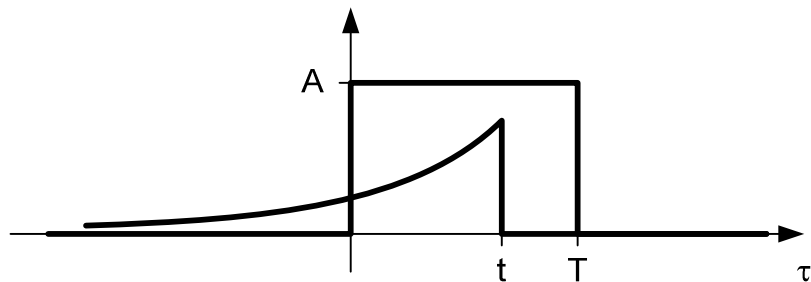
### 1. Phase: $t < 0$



Zu jedem Zeitpunkt  $\tau$  ist eines der beiden Signale gleich Null. Die Multiplikation von  $w(t-\tau)$  und  $u(\tau)$  ist also ebenfalls zu jedem Zeitpunkt Null. Das Resultat des Faltungsintegrals wird also auch Null sein, d.h.:

Wenn  $t < 0$ , dann ist  $y(t) = 0$ .

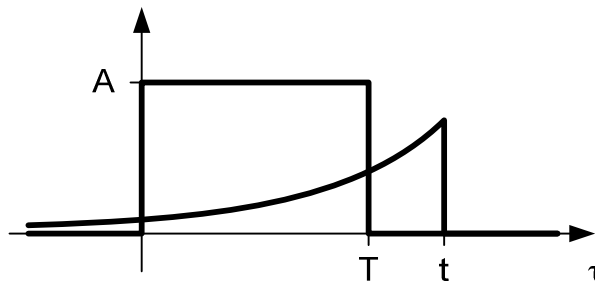
### 2. Phase: $0 < t < T$



Zwischen den Zeitpunkten  $\tau=0$  und  $\tau=t$  sind beiden Signale nicht Null und somit auch  $w(t-\tau) \cdot u(\tau)$  nicht Null. Es gilt also:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int_0^t \frac{1}{RC} \cdot e^{-\frac{t-\tau}{RC}} \cdot A \cdot d\tau \\
 &= \dots \\
 y(t) &= A \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)
 \end{aligned}$$

3. Phase:  $t > T$



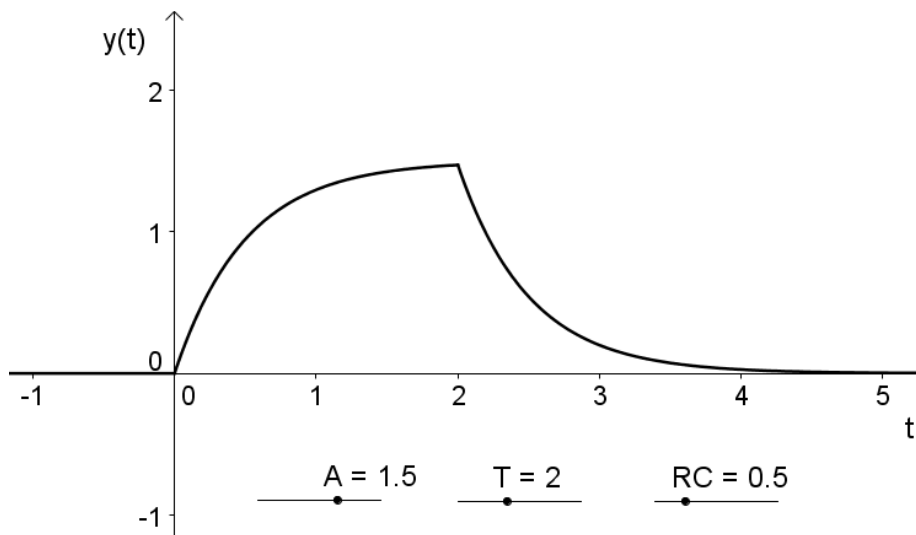
Zwischen den Zeitpunkt  $\tau=0$  und  $\tau=T$  sind beiden Signale nicht Null und somit auch  $w(t-\tau) \cdot u(\tau)$  nicht Null. Es gilt also:

$$y(t) = \int_0^T \frac{1}{RC} \cdot e^{-\frac{t-\tau}{RC}} \cdot A \cdot d\tau$$

$$= \dots$$

$$y(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \cdot \left( e^{\frac{T}{RC}} - 1 \right)$$

Zeichnet man nun die Antworten für jeden Zeitabschnitt auf erhält man die vollständige Antwort des RC-Tiefpass auf den Rechteckimpuls:



1.6 Literaturverzeichnis

[Heinlein 1991] Heinlein. Zeitbereichsanalyse von RLC-Netzwerken. Skript zur Vorlesung "Theoretische Elektrotechnik I". Universität Kaiserslautern. August 2011.

[Gysel 2004] Ulrich Gysel, Georgios Lekkas. Impulsantwort und Faltung [https://home.zhaw.ch/~spma/Scripts/SiSy\\_GSA/SiSy1/SiSy1\\_5\\_Zeitverhalten/006-TDOM.pdf](https://home.zhaw.ch/~spma/Scripts/SiSy_GSA/SiSy1/SiSy1_5_Zeitverhalten/006-TDOM.pdf)



## 2. Frequenzbereich

### 2.1 Fourierreihen

Fourier bewies, dass jedes periodische Signal in eine Reihe von Sinus- und Cosinusfunktionen unterschiedlicher Frequenzen und Amplituden zerlegt werden kann. Diese Aussage ist für die Signalübertragung von großer Bedeutung, da man somit herausfinden kann, welche Frequenzen in einem Signal vorhanden sind. Da Übertragungssysteme in der Praxis immer im nutzbaren Frequenzbereich begrenzt sind, ist dieses Wissen für die Klärung von Machbarkeiten und zur Erklärung von Verzerrungen von größter Wichtigkeit.

Nach Fourier gilt:

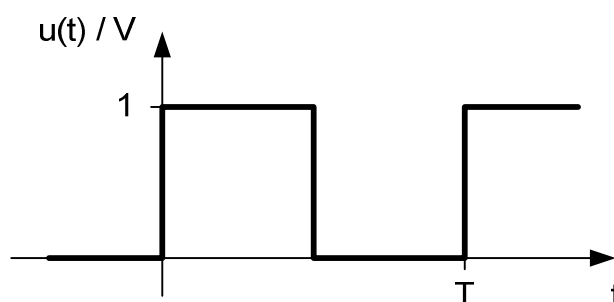
$$g(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cdot \cos(k2\pi f_0 t) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \cdot \sin(k2\pi f_0 t)$$

- $f_0 = \frac{1}{T}$  ist die Frequenz des zu zerlegenden Signals  $f(t)$  mit der Periodendauer  $T$ .
- $a_0$  ist der Mittelwert des zu zerlegenden Signals  $f(t)$ , also ist  $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot dt$ .
- $a_m$  und  $b_n$  sind die Amplituden der verschiedenen Sinus- und Cosinusfunktionen und berechnen sich (ohne Beweis) mit Hilfe folgender Formeln:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \cdot dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cdot \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \cdot dt$$

#### Fourierreihe am Beispiel einer Rechteckspannung:



$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^{T/2} 1 \cdot dt \\
 &= \frac{1}{T} [t]_0^{T/2} \\
 &= \frac{1}{T} \left[ \frac{T}{2} \right] \\
 a_0 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

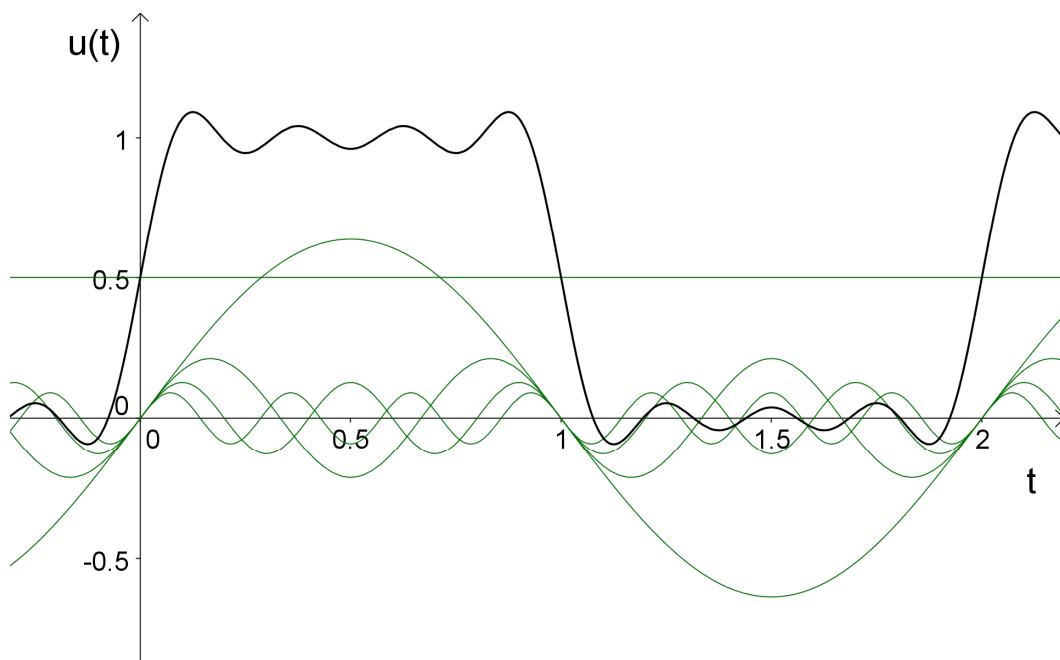
$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} 1 \cdot \cos(k2\pi f_0 t) dt \\
 &= \frac{2}{T} \cdot \frac{1}{k2\pi f_0} \cdot [\sin(k2\pi f_0 t)]_0^{T/2} \\
 &= \frac{1}{\pi k} [-\sin(\pi k)] \\
 a_k &= 0 \quad \forall k
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} 1 \cdot \sin(k2\pi f_0 t) dt \\
 &= \frac{2}{T} \cdot \frac{1}{k2\pi f_0} \cdot [-\cos(k2\pi f_0 t)]_0^{T/2} \\
 b_k &= \frac{1}{\pi k} [-\cos(\pi k) + 1]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{1}{\pi} [-(-1) + 1] = \frac{2}{\pi} \\
 b_2 &= \frac{1}{2\pi} [-1 + 1] = 0 \\
 b_3 &= \frac{1}{3\pi} [-(-1) + 1] = \frac{2}{3\pi} \\
 b_4 &= \frac{1}{2\pi} [-1 + 1] = 0
 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{u(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot \sin(2\pi f_0 t) + \frac{2}{3\pi} \cdot \sin(6\pi f_0 t) + \frac{2}{5\pi} \cdot \sin(10\pi f_0 t) + \dots}}$$

Hier die Darstellung der ersten sieben Harmonischen ( $k=7$ ) sowie deren Summe:



**Alternative Darstellungsformen der Fourier-Reihe:**

Anstatt ein Signal in Sinus- und Kosinusfunktionen unterschiedlicher Frequenz zu zerlegen, kann man das Signal auch nur in Kosinusfunktionen unterschiedlicher Frequenz zerlegen die aber gegeneinander phasenverschoben sein können. In diesem Fall stellt sich die Reihe wie folgt dar:

$$g(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cdot \cos(k2\pi f_0 t - \varphi_k)$$

- $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$
- $\varphi_k = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right) & \text{wenn } a_n \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right) + \pi & \text{wenn } a_n < 0 \end{cases}$  oder  $\varphi_k = 2 \cdot \arctan\left(\frac{b_n}{A_n + a_n}\right)$
- $a_k$  und  $b_k$  sind die bekannten Koeffizienten aus der Normaldarstellung

Diese Darstellung wird auch Spektralform oder **Betrags-/Phasen-Darstellung** genannt. Der Vorteil der Spektralform ist, dass man nur ein **Amplitudenspektrum** hat, dafür aber zusätzlich ein **Phasenspektrum** erhält. Nachteilig ist auch, dass man zur Berechnung der Koeffizienten die Koeffizienten der Normaldarstellung benötigt.

Übrigens nennt man die verschiedenen Kosinusfunktionen auch die **Harmonischen** des Signals. Die erste Harmonische ( $k=1$ ) wird auch **Grundschiwingung** genannt und hat immer die gleiche Frequenz wie das zu zerlegende Signal  $f(t)$ . Alle anderen Harmonischen werden auch **Oberwellen** genannt.

Die Frequenz der Grundschiwingung einer 1kHz-Dreiecksspannung ist also ebenfalls 1kHz. Die Frequenzen der Oberwellen betragen 2kHz, 3kHz, 4 kHz, ...

Noch kompakter lässt sich die Fourier-Reihe im **Komplexen** darstellen.

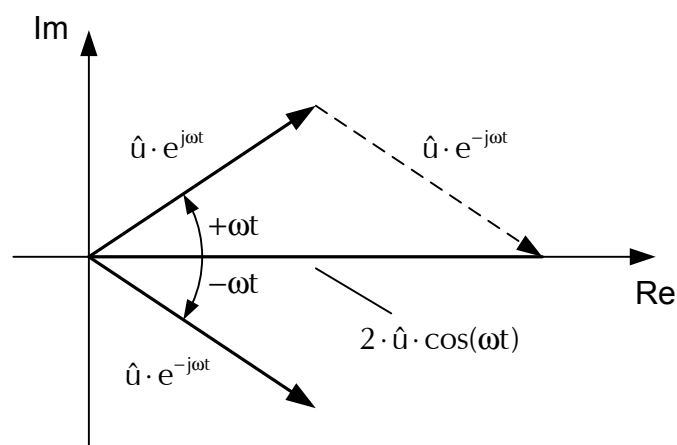
$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot e^{jk2\pi f_0 t}$$

- $c_k = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) \cdot e^{-j\frac{k2\pi}{T} t} dt$

Man beachte, dass die Koeffizienten jetzt auch negative Werte annehmen, dass nun also auch **"negative" Frequenzen** auftreten. Dies wird verständlich man folgende Zerlegung betrachtet:

$$\begin{aligned} u(t) &= \hat{u} \cdot \cos(\omega t) \\ &= \operatorname{Re}\{\hat{u} \cdot e^{j\omega t}\} \\ u(t) &= \frac{1}{2} \cdot (\hat{u} \cdot e^{j\omega t} + \hat{u} \cdot e^{-j\omega t}) \end{aligned}$$

Eine reelle harmonische Schwingung kann man sich also im Komplexen als Addition von zwei gegensinnig drehenden Zeigern vorstellen.

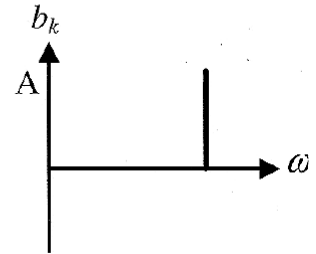
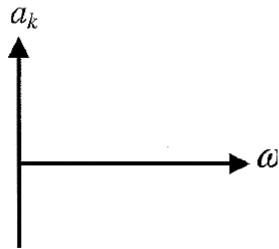


Dies erklärt die Präsenz von negativen Frequenzen im Spektrum. Sie stehen für die im Gegenuhrzeigersinn drehenden Zeiger. Dies erklärt auch warum das Amplitudenspektrum  $|\underline{c}_k|$  von reellen Funktionen gerade ist (= symmetrisch zur y-Achse) und warum das Phasenspektrum  $\arg(\underline{c}_k)$  ungerade ist. (siehe auch Seite 6 [Schlup 2005])

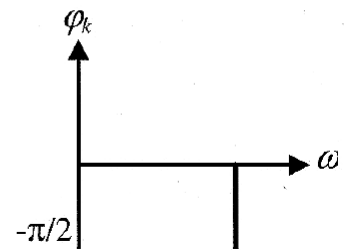
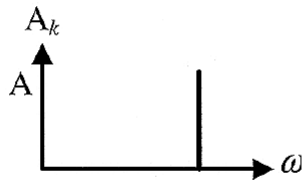
Im Folgenden die Darstellung des Fourier-Spektrums eines einfachen Sinus in allen Varianten.

([Meyer 2011])

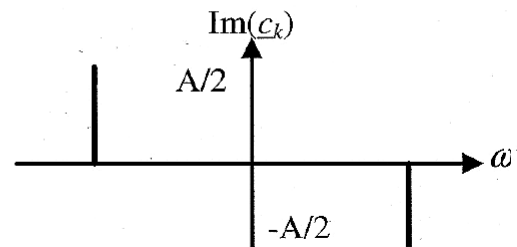
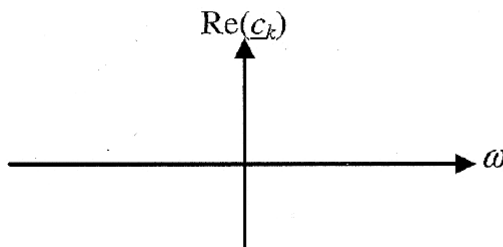
Sinus-/Cosinus-Darstellung:



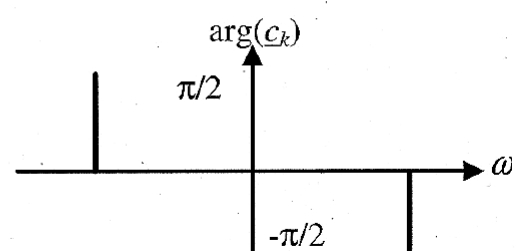
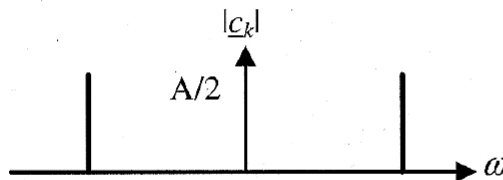
Betrags/Phasen-Darstellung:



Komplexe Darstellung (Real- und Imaginärteil):



Komplexe Darstellung (Betrag und Phase):



**Antwort eines RC-Tiefpass auf eine Rechteckspannung:**

Mit Hilfe der Fourier-Reihe kann man nicht nur das Spektrum eines periodischen Signals bestimmen, man kann auch die Antwort (=Ausgangsspannung) einer Schaltung auf ein periodisches Signal berechnen, wenn man die Übertragungsfunktion der Schaltung kennt.

Am Beispiel einer 1V/1kHz-Rechteckspannung die auf ein RC-Tiefpass mit einer Grenzfrequenz von 1kHz (d.h. RC=1,6E-4) gegeben wird soll die Vorgehensweise aufgezeigt werden. Die komplexe Übertragungsfunktion  $\underline{H}(\omega)$ , der Amplitudengang  $H(\omega)$  und der Phasengang  $\varphi(\omega)$  lauten:

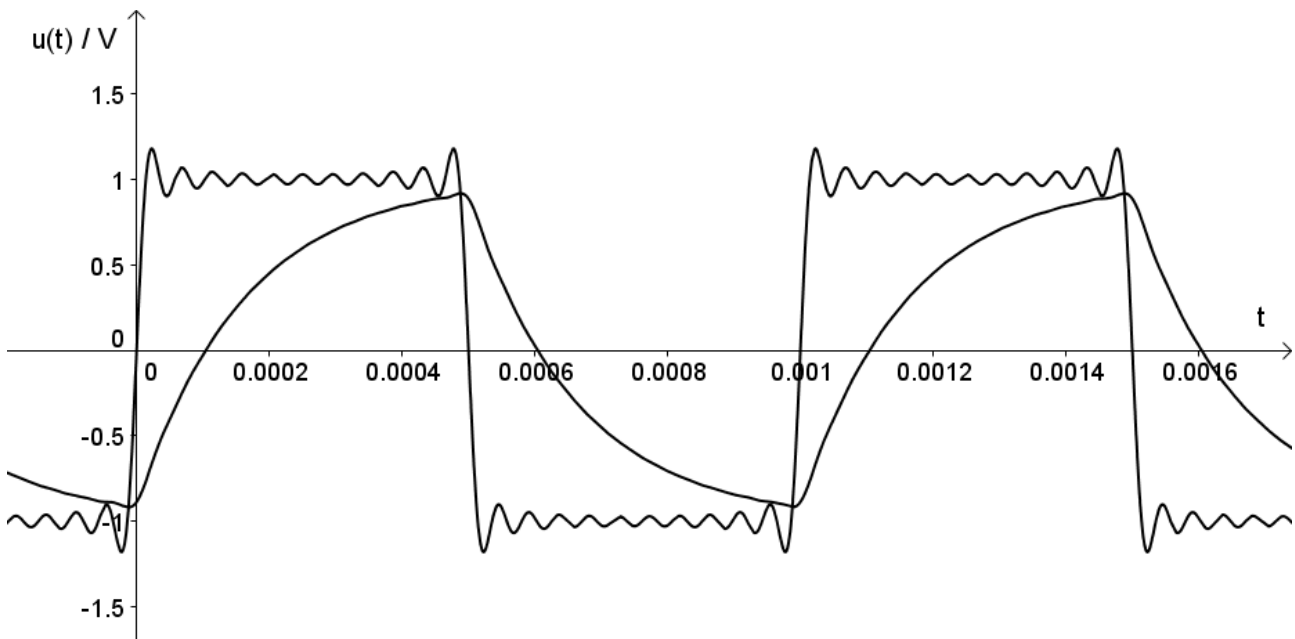
$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad \varphi(\omega) = -\arctan(\omega RC)$$

Harmonische	f <sub>i</sub> / Hz	û <sub>Ei</sub> ; φ <sub>Ei</sub>		H(f <sub>i</sub> ) ; φ(f <sub>i</sub> )		→	û <sub>Ai</sub> ; φ <sub>Ai</sub>	
1	1000	1,273V	0°	0,707	-45,0°	→	0,901V	-45,0°
2	2000	0V	0°	0,448	-63,4°	→	0V	-63,4°
3	3000	0,424V	0°	0,317	-71,5°	→	0,134V	-71,5°
4	4000	0V	0°	0,243	-76,0°	→	0V	-76,0°
5	5000	0,255V	0°	0,196	-78,7°	→	0,050V	-78,7°
6	6000	0V	0°	0,165	-80,5°	→	0V	-80,5°
7	7000	0,182V	0°	0,142	-81,9°	→	0,026V	-81,9°
8	8000	0V	0°	0,124	-82,9°	→	0V	-82,9°
9	9000	0,141V	0°	0,111	-83,7°	→	0,016V	-83,7°
10	10000	0V	0°	0,100	-84,3°	→	0V	-84,3°
...								

Dabei gilt:  $\hat{u}_{Ai} = \hat{u}_{Ei} \cdot H(f_i)$

$\varphi_{Ai} = \varphi_{Ei} + \varphi(f_i)$

Zählt man alle Harmonischen des Ausgangssignals zusammen so erhält man das Ausgangssignal. Im folgenden Bild sind die Summen der ersten 21 Harmonischen des Eingangs- und des Ausgangssignals gezeichnet. Man erkennt im Ausgangssignal sofort die periodischen Lade- und Entladevorgänge am Kondensator die durch die sprunghaften Spannungswechsel am Eingang hervorgerufen werden.

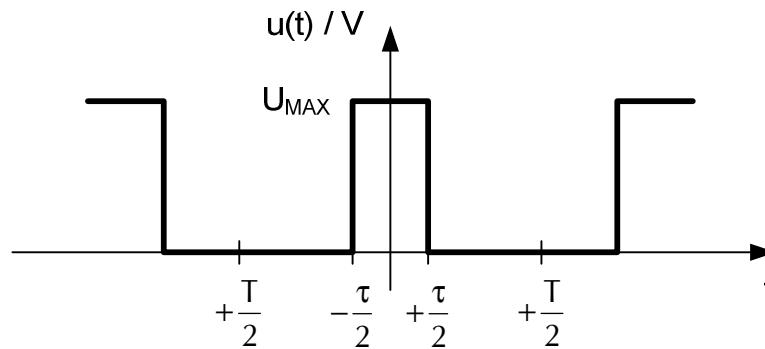


Bisher können wir also mit Hilfe des Faltungsintegrals die Antwort eines LTI-Systems auf ein beliebiges Signal berechnen. Falls die geschlossene Berechnung des Faltungsintegrals zu schwer ist, können wir uns mit der Fourier-Reihe aushelfen, aber bisher nur für periodische Signale.

Mit Hilfe der Fourier-Transformation wird es uns auch möglich sein die Antwort auf nicht-periodische Signale im Frequenzbereich zu finden und einen Zusammenhang zwischen Zeit- und Frequenzbereich herzustellen.

## 2.2 Fourier-Transformierte

Betrachten wir uns zunächst die komplexe Fourier-Reihe einer Rechteckspannung mit variablem Tastverhältnis.



$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot e^{jk2\pi f_0 t}$$

$$\underline{u}_0 = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} U_{MAX} dt$$

$$\underline{u}_0 = U_{MAX} \cdot \frac{\tau}{T}$$



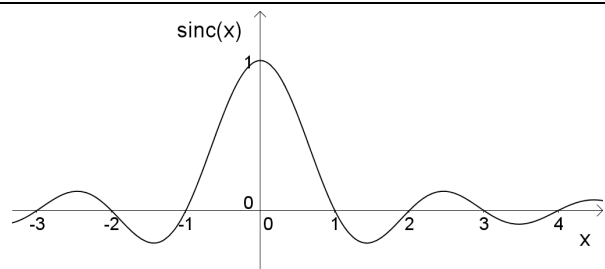
$$\begin{aligned}
 c_k &= \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} U_{MAX} \cdot e^{-jk2\pi f_0 t} dt \\
 &= \frac{U_{MAX}}{T} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} e^{-jk2\pi f_0 t} dt \\
 &= \frac{U_{MAX}}{T} \cdot \left[ \frac{e^{-jk2\pi f_0 t}}{-jk2\pi f_0} \right]_{-\tau/2}^{+\tau/2} \\
 &= \frac{U_{MAX}}{T} \cdot \frac{e^{-jk2\pi f_0 \frac{\tau}{2}} - e^{jk2\pi f_0 \frac{\tau}{2}}}{-jk2\pi f_0} \\
 &= \frac{U_{MAX}}{T} \cdot \frac{2 \cdot \sin\left(k2\pi f_0 \frac{\tau}{2}\right)}{k2\pi f_0} \\
 &= \frac{2U_{MAX}}{T} \cdot \frac{\sin\left(k2\pi f_0 \frac{\tau}{2}\right)}{k2\pi f_0} \\
 &= \frac{U_{MAX}}{T} \cdot \frac{\sin(k\pi f_0 \tau)}{k\pi f_0} \\
 &= \frac{U_{MAX} \cdot \tau}{T} \cdot \frac{\sin(k\pi f_0 \tau)}{k\pi f_0 \tau} \\
 &= U_{MAX} \cdot \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin(k\pi f_0 \tau)}{k\pi f_0 \tau} \\
 &= U_{MAX} \cdot \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin(k\pi f_0 \tau)}{k\pi f_0 \tau} \\
 c_k &= U_{MAX} \cdot \frac{\tau}{T} \cdot \text{sinc}(kf_0 \tau)
 \end{aligned}$$

mit  $\frac{e^{-jx} - e^{jx}}{-j} = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{j} = 2 \cdot \sin(x)$

mit  $\frac{1}{T} = f_0$

**Info:**

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

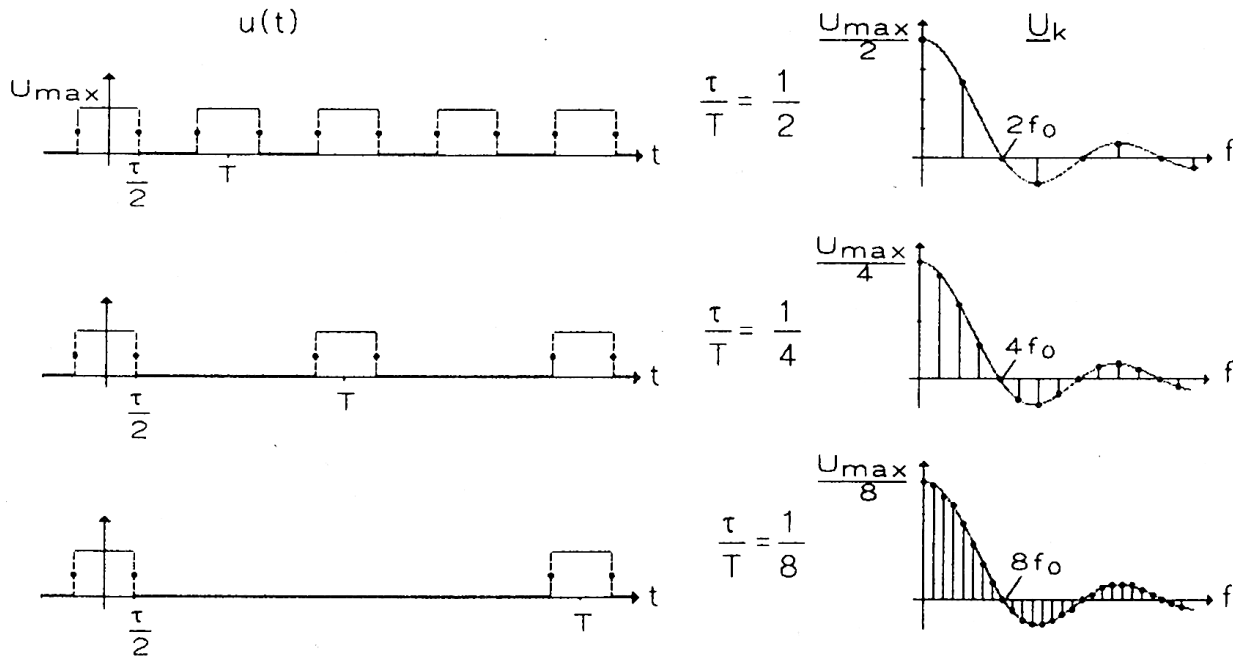


Für die komplexe Fourier-Reihe der gezeichnete Rechteckspannung gilt also:

$$u(t) = U_{MAX} \cdot \frac{\tau}{T} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} U_{MAX} \cdot \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin(k\pi f_0 \tau)}{k\pi f_0 \tau} \cdot e^{jk2\pi f_0 t} \quad \text{mit } k \neq 0$$

Übrigens sei darauf aufmerksam gemacht, dass alle Fourier-Koeffizienten der Rechteckspannung reell sind, also alle Harmonischen in Phase sind.

Hier nun die Darstellung der Koeffizienten für drei verschiedene Tastverhältnisse (aus [Šumichrast 1991]):



Man erkennt, wie das Spektrum mit zunehmender Periodendauer  $T$  immer dichter wird.

**Übergang zu aperiodischen Signalen:**

Macht man  $T$  unendlich groß ( $\lim_{T \rightarrow +\infty}$ ) so wird aus der periodischen Funktion eine aperiodische.

Aus dem diskreten Spektrum wird ein kontinuierliches Spektrum. Die Frequenz  $f = \frac{1}{T}$  wird infinitesimal klein, d.h.:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} = df$$

und aus den diskreten Frequenzen wird eine kontinuierliche Frequenzvariable.

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} k \cdot f_0 = f$$

Aus der Summe wird ein Integral:

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[ U_{MAX} \cdot \frac{\tau}{T} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} U_{MAX} \cdot \frac{\tau}{T} \cdot \text{sinc}(kf_0\tau) \cdot e^{jk2\pi f_0 t} \right] \\
 &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[ U_{MAX} \cdot \frac{\tau}{T} \right] + \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} U_{MAX} \cdot \tau \cdot \text{sinc}(kf_0\tau) \cdot e^{jk2\pi f_0 t} \cdot \frac{1}{T} \right] \\
 &= 0 + \int_{-\infty}^{+\infty} U_{MAX} \cdot \tau \cdot \text{sinc}(f\tau) \cdot e^{j2\pi f t} \cdot df \\
 u(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} U_{MAX} \cdot \tau \cdot \text{sinc}(f\tau) \cdot e^{j2\pi f t} \cdot df
 \end{aligned}$$

oder allgemein:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{U}(j\omega) \cdot e^{j2\pi f t} \cdot df$$

$\underline{U}(j\omega)$  wird auch die **Fourier-Transformierte** von  $u(t)$  genannt. Es gilt (ohne Beweis):

$$\underline{U}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cdot e^{-j2\pi f t} \cdot dt \qquad \text{(Beweis siehe [Šumichrast 1991] S.51)}$$

Die enge Verwandtschaft zwischen Fourier-Reihe und Fourier-Transformierten wird mit folgender Tabelle verdeutlicht:

Periodische Funktion	→	Aperiodische Funktion
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{c}_k e^{jk\omega_0 t}$	→	$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{X}(j\omega) e^{j\omega t} df$
$\frac{1}{T}$	→	$df$
$kf_0, k\omega_0$	→	$f, \omega$
$\underline{c}_k$	→	$\underline{X}(j\omega)$
$\sum \dots$	→	$\int \dots$
$\underline{c}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$	→	$\underline{X}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$

Die Fourier-Transformierte mag etwas abstrakt erscheinen, sie hat aber eine sehr reale Anwendung wie wir recht schnell sehen werden. Wie gesehen gilt:

$$u_E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{U}_E(j\omega) \cdot e^{j2\pi ft} \cdot d\omega$$

Für die Ausgangsspannung  $u_A(t)$  einer Schaltung gilt also analog:

$$u_A(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{U}_A(j\omega) \cdot e^{j2\pi ft} \cdot d\omega$$

Aufgrund der Linearität der LTI-Systeme kann man mit  $\underline{U}_A(j\omega) = \underline{U}_E(j\omega) \cdot \underline{W}(j\omega)$  schlussfolgern, dass auch gilt:

$$u_A(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{U}_E(j\omega) \cdot \underline{W}(j\omega) \cdot e^{j2\pi ft} \cdot d\omega$$

wo  $\underline{W}(j\omega)$  der komplexe Frequenzgang der Schaltung ist.

Nun nehmen wir einen Dirac-Impuls  $\delta(t)$  als Eingangssignal, womit  $u_A(t)$  zur Impulsantwort  $w(t)$  wird. Wie man leicht zeigen kann, ist die Fourier-Transformierte von  $\delta(t)$  gleich 1.

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \underline{U}_E(j\omega) = 1$$

Es gilt also:

$$w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{W}(j\omega) \cdot e^{j2\pi ft} \cdot d\omega$$

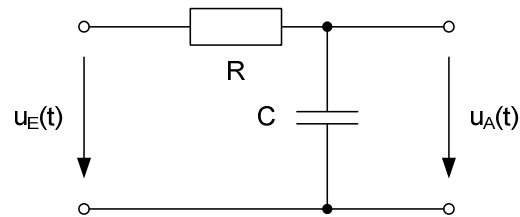
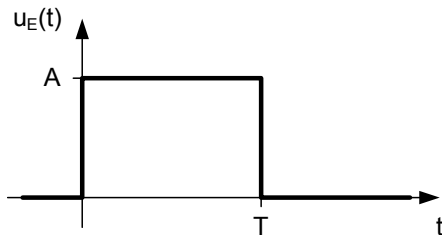
Diese Gleichung ist ein echter Paukenschlag, sagt sie doch, dass die Impulsantwort  $w(t)$  die Fourier-Rücktransformierte des Frequenzgangs  $\underline{W}(j\omega)$  ist, welche wiederum im Allgemeinen aus den Bauteilwerten der Schaltung hergeleitet werden kann. Diese Gleichung stellt also eine Verbindung zwischen dem Zeitbereichsverhalten und dem Frequenzbereichsverhalten einer Schaltung her. Kennt man deren Frequenzverhalten, so kann man die Impulsantwort berechnen und umgekehrt.

**Die Impulsantwort und der komplexe Frequenzgang beschreiben also jede für sich vollständig das Verhalten eines LTI-Systems.**

## Berechnung der Antwort eines RC-Tiefpass auf einen Rechteckimpuls mit Hilfe der Fouriertransformation

Am Beispiel der bereits im Kapitel 1 durch Faltung im Zeitbereich gelösten Aufgabe soll gezeigt werden, dass sich die Antwort eines RC-Tiefpass auf einen Rechteckimpuls mit Hilfe der Fourier-Transformierten ebenfalls im Frequenzbereich berechnen lässt.

Das Eingangssignal  $u_E(\tau)$  ist wieder ein Rechteckimpuls der Höhe  $A$  und der Dauer  $T$ .



$$\begin{aligned}\underline{U}_E(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u_E(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt \\ &= A \int_0^T e^{-j\omega t} \cdot dt\end{aligned}$$

$$\underline{U}_E(j\omega) = A \cdot \frac{e^{-j\omega T} - 1}{-j\omega}$$

$$\begin{aligned}\underline{W}(j\omega) &= \frac{\underline{U}_A(j\omega)}{\underline{U}_E(j\omega)} \\ &= \frac{\underline{X}_C}{\underline{X}_C + R} \\ &= \frac{1}{j\omega C} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{j\omega C} + R}\end{aligned}$$

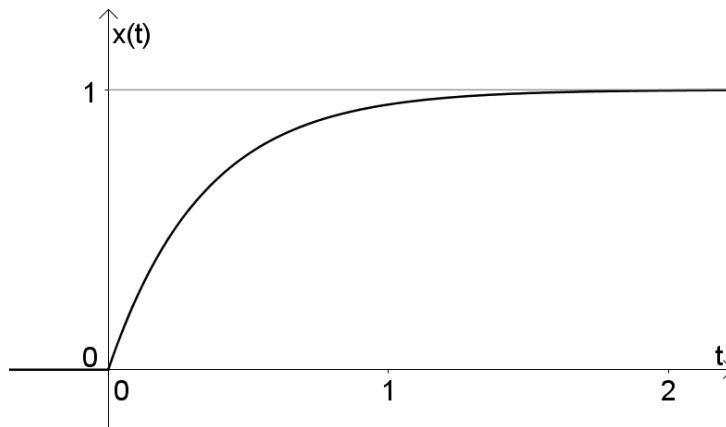
$$\underline{W}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Für die Ausgangsspannung  $\underline{U}_A(j\omega)$  gilt also:

$$\begin{aligned}\underline{U}_A(j\omega) &= \underline{U}_E(j\omega) \cdot \underline{W}(j\omega) \\ &= A \cdot \frac{e^{-j\omega T} - 1}{-j\omega} \cdot \frac{1}{1 + j\omega RC} \\ &= A \cdot \frac{e^{-j\omega T}}{-j\omega} \cdot \frac{1}{1 + j\omega RC} + A \cdot \frac{-1}{-j\omega} \cdot \frac{1}{1 + j\omega RC} \\ &= -A \cdot \frac{1}{j\omega \cdot (1 + j\omega RC)} \cdot e^{-j\omega T} + A \cdot \frac{1}{j\omega \cdot (1 + j\omega RC)} \\ \underline{U}_A(j\omega) &= A \cdot \frac{1}{j\omega \cdot (1 + j\omega RC)} - A \cdot \frac{1}{j\omega \cdot (1 + j\omega RC)} \cdot e^{-j\omega T}\end{aligned}$$

Man erkennt, dass  $\underline{U}_A(j\omega)$  aus zwei ähnlichen Termen besteht. Der zweite Term ist lediglich um den Faktor  $e^{-j\omega T}$  erweitert. Eine Multiplikation mit  $e^{-j\omega T}$  im Frequenzbereich entspricht einer Zeitverschiebung um  $T$  im Zeitbereich. Man kann jetzt also schon sagen, dass die Antwort  $u_A(t)$  aus einer Subtraktion von zwei um  $T$  zeitverschobenen gleichen Signalen besteht.

Zur leichteren Lösung des Integrals der Fourier-Rücktransformierten von  $\underline{U}_A(j\omega)$  zäumen wir das Pferd von hinten auf. Dazu betrachten wir uns zunächst die Fouriertransformierte der normierten "Ladekurve eines Kondensators".



$$\begin{aligned}
 x(t) &= (1 - e^{-at}) \cdot h(t) \\
 \underline{X}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt \\
 &= \int_0^{+\infty} (1 - e^{-at}) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt \\
 &= \left[ \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_0^{+\infty} - \left[ \frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)} \right]_0^{+\infty} \\
 \underline{X}(j\omega) &= \frac{1}{j\omega} - \frac{1}{a+j\omega}
 \end{aligned}$$

Man erkennt die Ähnlichkeit des Resultats zum Ausdruck  $\frac{1}{j\omega \cdot (1 + j\omega RC)}$  in  $\underline{U}_A(j\omega)$ , allerdings muss der Bruch zur genauen Bestimmung von  $a$  noch zerlegt werden.

$$\begin{aligned}\frac{1}{j\omega \cdot (1+j\omega RC)} &= \frac{A}{j\omega} + \frac{B}{1+j\omega RC} \\ &= \frac{A \cdot (1+j\omega RC) + B \cdot j\omega}{j\omega \cdot (1+j\omega RC)} \\ \frac{1+0 \cdot j\omega}{j\omega \cdot (1+j\omega RC)} &= \frac{A + (A \cdot RC + B) \cdot j\omega}{j\omega \cdot (1+j\omega RC)}\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich im Zähler folgt:

$$\begin{cases} A = 1 \\ A \cdot RC + B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -\frac{1}{RC} \end{cases}$$

Somit ergibt sich:

$$\frac{1}{j\omega \cdot (1+j\omega RC)} = \frac{1}{j\omega} - \frac{1}{\frac{1}{RC} + j\omega}$$

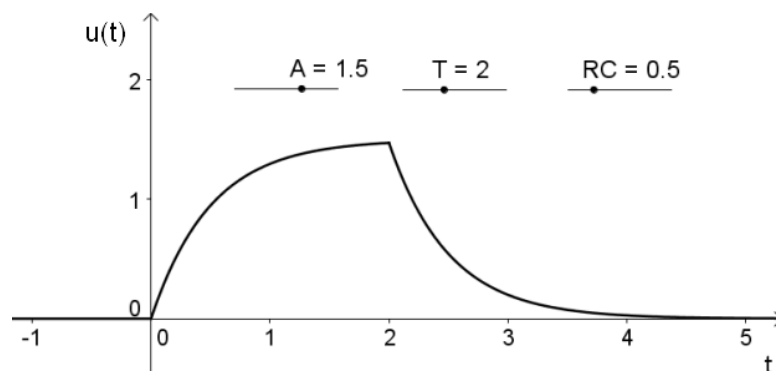
Für  $\underline{U}_A(j\omega)$  gilt also:

$$\underline{U}_A(j\omega) = A \cdot \left( \frac{1}{j\omega} - \frac{1}{\frac{1}{RC} + j\omega} \right) - A \cdot \left( \frac{1}{j\omega} - \frac{1}{\frac{1}{RC} + j\omega} \right) \cdot e^{-j\omega T}$$

Somit bestimmt sich die Ausgangsspannung zu:

$$u_A(t) = A \cdot \left( 1 - e^{-\frac{1}{RC}t} \right) \cdot h(t) - A \cdot \left( 1 - e^{-\frac{1}{RC}(t-T)} \right) \cdot h(t-T)$$

Die entspricht in geschlossener Form genau dem gleichen Ergebnis wie in Kapitel 1.



**Literaturverzeichnis**

- [Bevilacqua] Peter J. Bevilacqua, <http://thefouriertransform.com/>
- [Meyer 2011] Martin Meyer. Signalverarbeitung. 6. Auflage. Vieweg+Teubner.
- [Schlup 2005] Martin Schlup. Fourier-Reihen. Skript zur Vorlesung "Signale und Systeme". Zürcher Hochschule für angewandte Wissenschaften. September 2005.  
[https://home.zhaw.ch/~spma/Scripts/SiSy\\_GSA/SiSy1/SiSy1\\_3\\_Fourierreihen/SiSy1\\_Th3\\_FourierReihen.pdf](https://home.zhaw.ch/~spma/Scripts/SiSy_GSA/SiSy1/SiSy1_3_Fourierreihen/SiSy1_Th3_FourierReihen.pdf)
- [Šumichrast 1991] Šumichrast, Heinlein. Skript zur Vorlesung "Theoretische Elektrotechnik II". Universität Kaiserslautern.