3. Fourieranalyse und Amplitudenspektren

3.1 Fourieranalyse

3.1.1 Einleitung

Laut dem französischen Mathematiker Fourier (1768-1830) kann jedes periodische Signal in eine Summe von sinusförmigen Signalen mit unterschiedlichen Amplituden, Frequenzen und Phasen zerlegt werden. Die Frequenzen der sinusförmigen Signale müssen dabei ein Mehrfaches der Frequenz des zu zerlegenden Signals sein. Bild 1 zeigt das Resultat der Addition der vier sinusförmigen Signale mit dem Ziel eine Sägezahnspannung zu bilden.

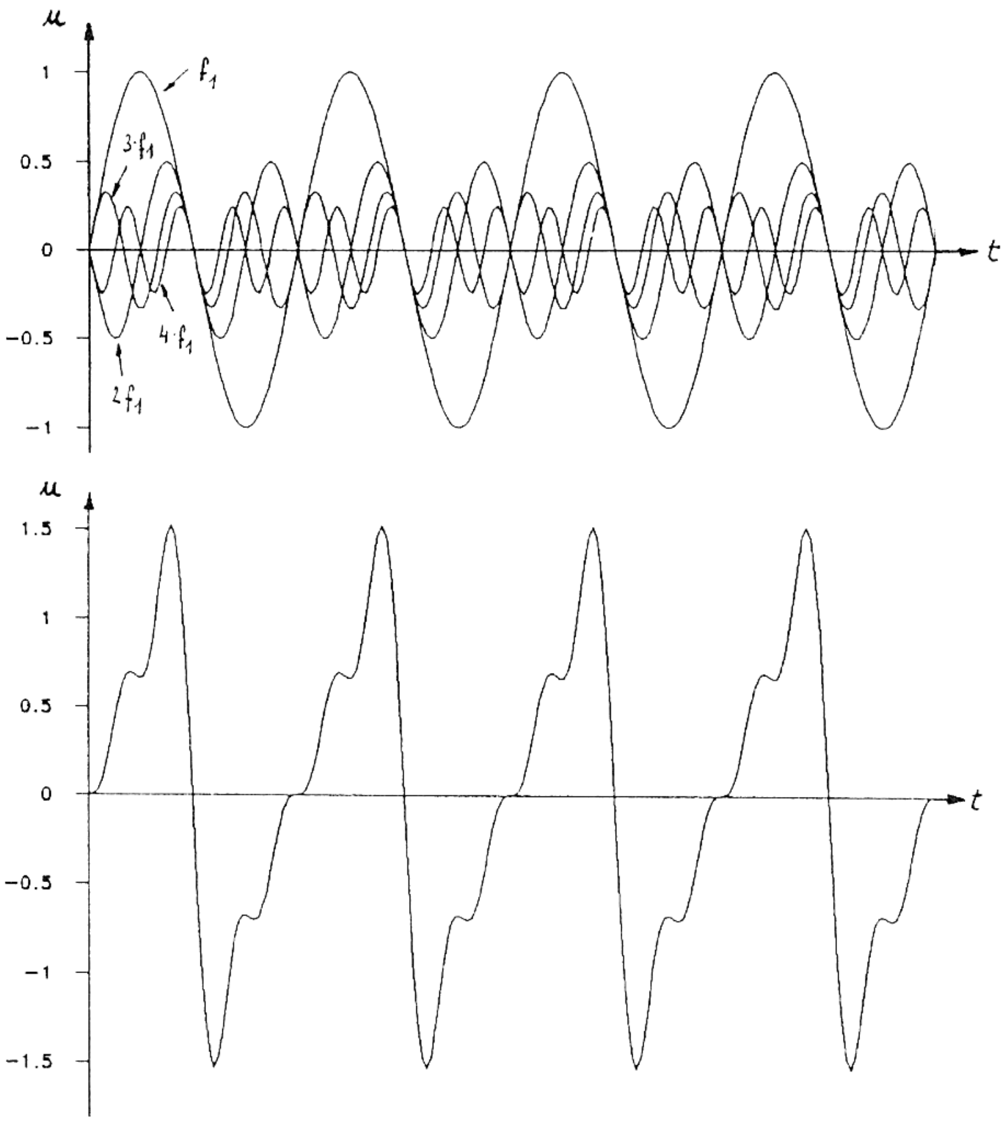


Bild 1: Sägezahnspannung durch Addition aus vier sinusförmigen Spannungen

Um eine perfekte Sägezahnspannung zu erhalten müsste man theoretisch eine unendlich lange Reihe von Sinusschwingungen addieren. Die verschiedenen Sinussignale bezeichnet man als *Harmonische*.

Die Bestimmung der Amplituden und Phasen der verschiedenen Harmonischen bezeichnet man als *Fourieranalyse*.

3.1.2 Versuch: Fourieranalyse einer Rechteckspannung

In diesem Versuch soll messtechnisch die Fourieranalyse einer Rechteckspannung durchgeführt werden. Dabei wird die Rechteckspannung mit einem Scheitelwert von $\hat{u} = 1$ V und einer Frequenz von $f_1 = 1$ kHz auf einen Bandpassfilter hoher Güte und variabler Resonanzfrequenz gegeben. Durch Variieren der Resonanzfrequenz können die einzelnen Sinusschwingungen die im Eingangssignal enthalten sind herausgefiltert und auf dem Oszilloskop dargestellt werden. Die Amplituden, Phasenverschiebungen und Frequenzen der einzelnen Harmonischen können so bestimmt werden. Zur Bestimmung der Phasenverschiebung muss das Eingangssignal ebenfalls gemessen werden.

Aufbau:

(einzustellende Parameter am Bandpass: G_U=1 Q=100)

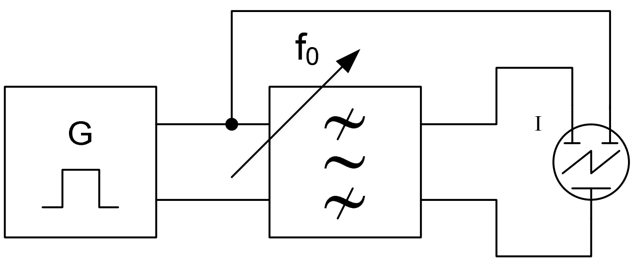


Bild 2: Versuchsaufbau zur Fourieranalyse einer Rechteckspannung

Ergebnisse:

N°	f (kHz)	û (V)	φ (°)	Bezeichnung	û (V) theoretisch
1	1	1,270	0°	1. Harmonische oder Grundschwingung	$\frac{4}{\pi}$
2	2	0	/	2. Harmonische	0
3	3	0,424	0°	3. Harmonische	$\frac{4}{3\pi}$
4	4	0	/	4. Harmonische	0
5	5	0,255	0°	5. Harmonische	$\frac{4}{5\pi}$
6	6	0	/	6. Harmonische	0
7	7	0,182	0°	7. Harmonische	$\frac{4}{7\pi}$
8	8	0	/	8. Harmonische	0

Beobachtungen:

a) Die Frequenzen der Sinusschwingungen sind Mehrfache der Frequenz f_1 des Rechtecksignals.

b) In einer Rechteckspannung sind nur ungerade Harmonische enthalten.

c) Die Amplituden der Harmonischen bei einer Rechteckspannung sind umgekehrt proportional zur Frequenz.

Applets zur Fourieranalyse:

http://www.falstad.com/mathphysics.html

http://www.schulphysik.de/java/physlet/applets/synthese.html

http://lumimath.univ-mrs.fr/~jlm/cours/fourier/fourier2.htm

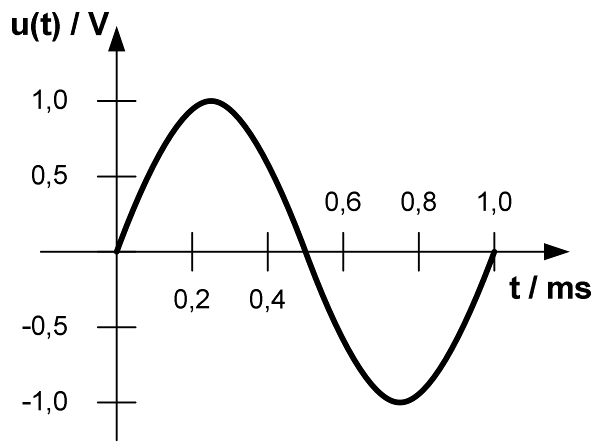
3.2 Das Amplitudenspektrum

Alternativ zum Signal-Zeit-Diagramm kann jedes beliebige Signal auch mit Hilfe von einem sogenannten Amplitudenspektrum visualisiert werden. Das Amplitudenspektrum ist das Diagramm $\hat{u}=f(f)$.

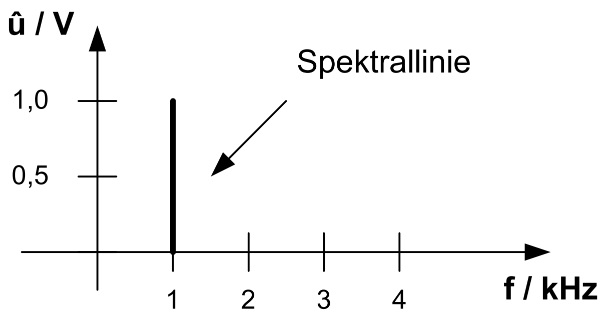
Beispiele:

a) Amplitudenspektrum einer sinusförmigen Spannung (f_1 = 1 kHz)

Signal-Zeit-Diagramm



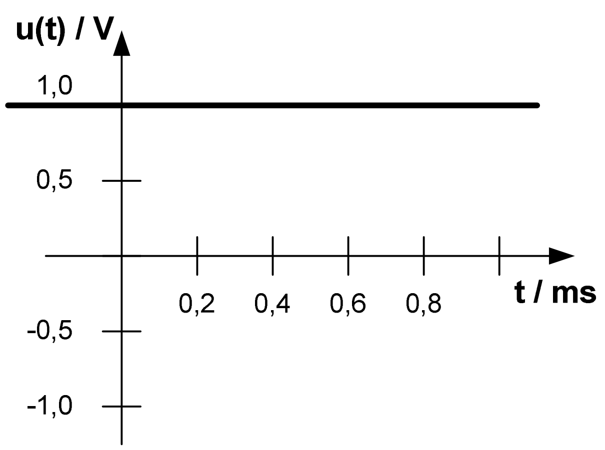
Amplitudenspektrum



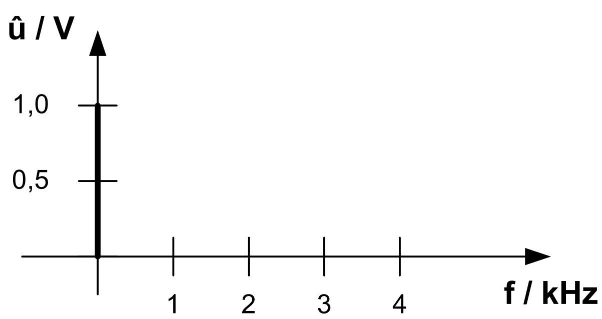
Im Amplitudenspektrum erscheint eine Spektrallinie bei der Frequenz des Sinus. Die Höhe der Linie entspricht der Amplitude der sinusförmigen Spannung.

b) Amplitudenspektrum einer Gleichspannung

Signal-Zeit-Diagramm



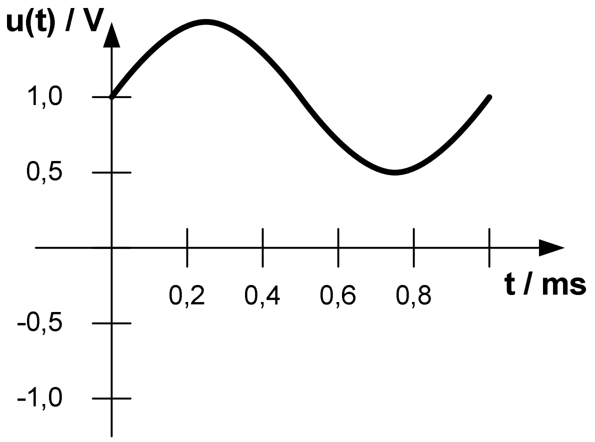
Amplitudenspektrum



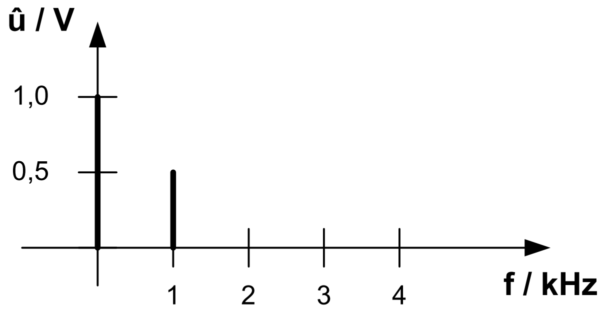
Eine Gleichspannung hat eine Frequenz f = 0 Hz.

c) Amplitudenspektrum einer Mischspannung

Signal-Zeit-Diagramm



Amplitudenspektrum



Aufgabe 1:

Zeichne das Amplitudenspektrum einer Rechteckspannung (û=1V, f=1kHz) wie sie im Versuch analysiert wurde.

Bemerkung:

Neben dem Amplitudenspektrum kann man auch ein Phasenspektrum zeichnen φ=f(f). Beide Diagramme zusammen nennt man dann *Bodediagramm*.

In vielen Fälle ist die Betrachtung des Amplitudenspektrums ausreichend.

3.3 Techniken um Spektren zu bestimmen

3.3.1 Bandpassfilter

Diese Technik wurde bereits im Versuch behandelt. Sie ist einfach aber dafür zeitaufwendig und relativ ungenau.

3.3.2 Mathematische Berechnung mit Hilfe von Integralen

Mit Hilfe von Integralen lassen sich die Amplituden und Phasen der Harmonischen auch rechnerisch aus der Funktionsgleichung $u=f(t)$ bestimmen.

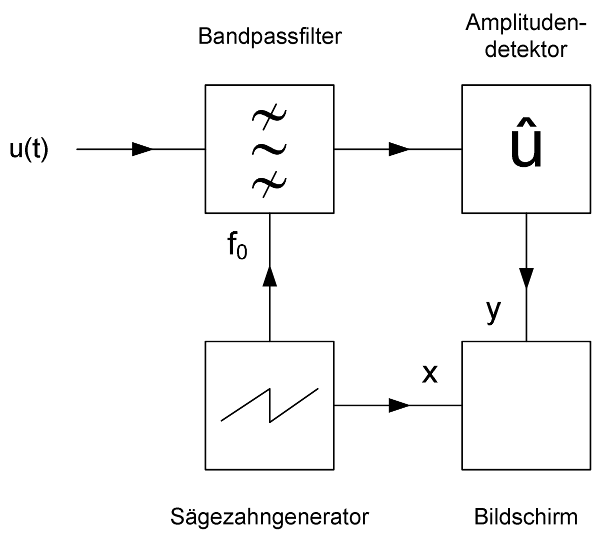
3.3.3 FFT (Fast Fourier Transform)

Die FFT ist ein Algorithmus (= Berechnungsvorschrift) um das Spektrum aus den Abtastwerten eines digitalisierten Signals zu berechnen. Viele Digitaloszilloskopen enthalten diesen Algorithmus und können so aus dem Signal-Zeit-Diagramm das Amplituden- oder Phasenspektrum berechnen.

3.3.4 Spektrumanalysator

Der Spektrumanalysator (Abkürzung: SA) ist ein Messgerät mit dem man kontinuierlich das Spektrum eines beliebigen Signal messen kann. Obwohl der Spektrumanalysator eine der effizientesten Methoden zur Bestimmung des Spektrums ist, so ist es auch eine der teuersten. Das Funktionsprinzip des SA beruht auf dem des Bandpassfilters.

Blockschaltbild eines Spektrumanalysators:



In einem Spektrumanalysator durchläuft das Messsignal einen Bandpassfilter. Die Resonanzfrequenz des Bandpassfilters verändert sich in Abhängigkeit einer Sägezahnspannung. Gleiches gilt für die horizontale Position (= x-Achse) des Elektronenstrahls in der Bildröhre. Die vertikale Position des Elektronenstrahls verändert sich in Abhängigkeit der Amplitude der Sinusspannung die aus dem Bandpassfilter kommt.

In der Praxis messen die Spektrumanalysatoren statt der Amplitude eher die Leistung des Signals am Ausgang des Bandpassfilters in Abhängigkeit von der Frequenz. Zudem wird die Leistung meist in dBm angezeigt. Es gilt:

$$\boxed{L_P = 10 \cdot \log\left(\frac{P}{1\text{mW}}\right)}$$

P ist die Leistung in Milliwatt (mW)

L_P ist der ***Leistungspegel*** (engl.: power level) in Dezibel Milliwatt (dBm)

Aufgabe 2:

Vervollständige folgende Tabelle:

P / mW	**L_P / dBm**
0,01	
0,1	
1	
10	
100	

Schlussfolgerung:

Jede Erhöhung des Leistungspegels L_P um 10dBm, entspricht einer ______________________ der Leistung.

Aufgabe 3:

a) Vervollständige folgende Tabelle:

P / mW	**L_P / dBm**
	-6
	-3
	0
	3
	6

Schlussfolgerung:

Jede Erhöhung des Leistungspegels L_P um 3dBm, entspricht einer ____________________ der Leistung.

b) Bestimme ohne Taschenrechner die Leistung P in mW, wenn der Pegel 36dBm beträgt.

3.4 <u>Bedeutung der Fourieranalyse in der Kommunikationstechnik</u>

Das Wissen um die Frequenzen die in einem Signal enthalten sind ist in der Kommunikationstechnik von sehr hohem Stellenwert. <u>*Jeder Übertragungskanal*</u> (z.B. die Zweidrahtleitung der Post, das Koaxialkabel der Gemeinschaftsantenne, die Luft bei Drahtlosübertragungen) <u>*ist bandbegrenzt*</u>, d.h. es gibt eine maximale und manchmal auch eine minimale Frequenz die er übertragen kann.

Die Differenz zwischen der höchsten und der niedrigsten übertragbaren Frequenz nennt man <u>*Bandbreite*</u> B. Shannon und Hartley fanden heraus, dass die maximale Übertragungsgeschwindigkeit C_S auf einem Übertragungskanal unter anderem von der Bandbreite abhängen.

<u>Shannon-Hartley-Gesetz:</u>

$$\boxed{C_S = B \cdot \mathrm{ld}\left(1+SNR\right) = B \cdot \frac{\ln\left(1+SNR\right)}{\ln 2}}$$

C_S ist die max. Übertragungsgeschwindigkeit, auch <u>*Kanalkapazität*</u> genannt, einer Übertragungsstrecke in Bit pro Sekunde (bit/s)

$B=f_{MAX}-f_{MIN}$ ist die Bandbreite des Kanals in Hertz (Hz)

SNR ist das Signal-Rausch-Verhältnis des Signals am Ausgang des Kanals (ohne Einheit)

Bedeutung der Fourieranalyse in der Kommunikationstechnik

(version prof)

Das Wissen um die Frequenzen die in einem Signal enthalten sind ist in der Kommunikationstechnik von sehr hohem Stellenwert. *Jeder Übertragungskanal* (z.B. die Zweidrahtleitung der Post, das Koaxialkabel der Gemeinschaftsantenne, die Luft bei Drahtlosübertragungen) *ist bandbegrenzt*, d.h. es gibt eine maximale und manchmal auch eine minimale Frequenz die er übertragen kann.

Wenn ein Signal Frequenzen enthält die außerhalb des Frequenzbands liegen die der Übertragungskanal übertragen kann, so wird das Signal verzerrt (=verformt) und die enthaltene Information wird verändert oder geht im schlimmsten Fall sogar verloren.

Die Differenz zwischen der höchsten und der niedrigsten übertragbaren Frequenz nennt man *Bandbreite* B. Shannon und Hartley fanden heraus, dass die maximale Übertragungsgeschwindigkeit C_S auf einem Übertragungskanal unter anderem von der Bandbreite abhängen.

Shannon-Hartley-Gesetz:

$$\boxed{C_S = B \cdot \mathrm{ld}(1+SNR) = B \cdot \frac{\ln(1+SNR)}{\ln 2}}$$

C_S ist die max. Übertragungsgeschwindigkeit, auch *Kanalkapazität* genannt, einer Übertragungsstrecke in Bit pro Sekunde (bit/s)

$B=f_{MAX}-f_{MIN}$ ist die Bandbreite des Kanals in Hertz (Hz)

SNR ist das Signal-Rausch-Verhältnis des Signals am Ausgang des Kanals (ohne Einheit)

Je größer die Bandbreite eines Kanals ist, umso höher kann die maximale Übertragungsgeschwindigkeit sein.