4. Passive elektronische Filter

4.1 Wiederholung über die Grundbauelemente an Wechselspannung

$X_C = f(f)$

$X_L = f(f)$

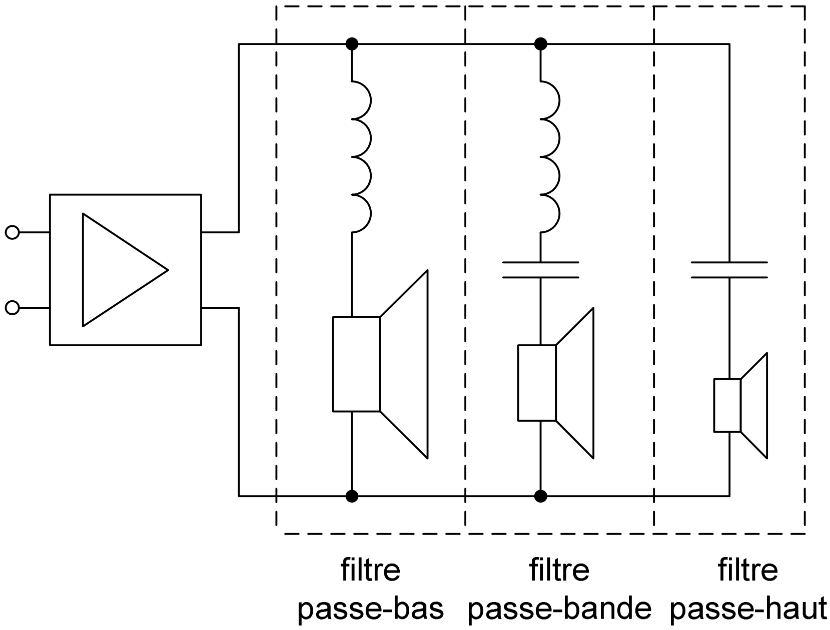
$R = f(f)$

4.2 Einleitung

Aufgabe 1:

Entwickle mit deinen Kenntnissen über die Grundbauelemente an Wechselspannung die Schaltung einer 3-Wege-Frequenzweiche für eine 3-Wege-Lautsprecherbox.

Lösung:

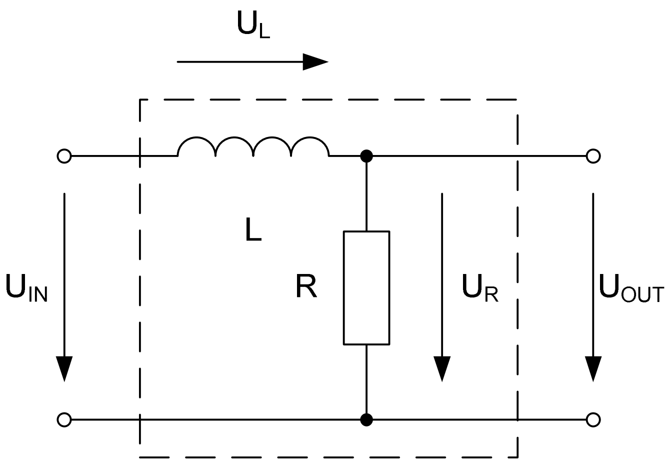


4.3 RL-Tiefpass

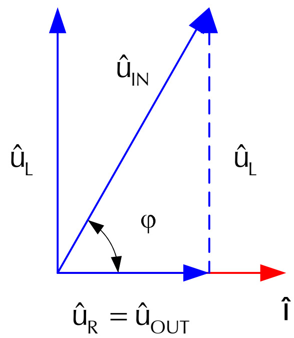
In Aufgabe 1 bildet die Spule in Reihe mit dem Lautsprecher einen Tiefpass-Filter. Ein Tiefpass-Filter ist eine elektronische Schaltung die tiefe Frequenzen passieren lässt und hohe Frequenzen dämpft.

Im Versuch 1 wurde des Weiteren festgestellt, dass sich ein Lautsprecher vor allem wie eine ohmsche Last verhält. Die einfachste Art ein Tiefpass-Filter zu realisieren ist also eine Spule und einen ohmschen Widerstand in Reihe zu schalten. Man nennt diese Schaltung "RL-Tiefpass".

Schaltung eines RL-Tiefpass:



Zeigerdiagramm:



Funktionsweise:

Der RL-Tiefpass ist im Prinzip ein frequenzabhängiger Spannungsteiler. Die kleinste Spannung befindet sich dabei immer am kleinsten Widerstandwert.

Erhöht man die Frequenz, so gilt:

$$f \uparrow \Rightarrow X_L \uparrow \Rightarrow \hat{u}_L \uparrow \Rightarrow \hat{u}_R \downarrow \Rightarrow \hat{u}_{OUT} \downarrow$$

Für die sehr hohen Frequenzen gilt also:

$$\underline{\underline{\hat{u}_{OUT} \approx 0V}}$$

Verringert man die Frequenz, so gilt:

$$f \downarrow \Rightarrow X_L \downarrow \Rightarrow \hat{u}_L \downarrow \Rightarrow \hat{u}_R \uparrow \Rightarrow \hat{u}_{OUT} \uparrow$$

Für die sehr tiefen Frequenzen gilt also:

$$\underline{\underline{\hat{u}_{OUT} \approx \hat{u}_{IN}}}$$

Erhöht man die Frequenz nimmt also der Scheitelwert der Ausgangsspannung $\hat{u}_{OUT}$ stetig ab. Mit Hilfe des Bode-Diagramms kann man das Verhalten der Schaltung für alle Frequenzen graphisch darstellenden (siehe auch Versuch 2).

4.4 Bode-Diagramm

4.4.1 Definition

Das Bode-Diagramm eines Filters besteht aus zwei Kennlinien, dem Amplitudengang G_U=f(f) oder G_{dB}=f(f) und dem Phasengang φ=f(f).

Aufgabe 2:

a) Bestimme den Spannungsverstärkungsfaktor und die Phasenverschiebung eines RL-Tiefpass bei den Extremfrequenzen 0Hz und +∞Hz.

b) Zeichne mit den Resultaten aus Punkt a) qualitativ das Bode-Diagramm [G_U=f(f) und φ=f(f)] eines RL-Tiefpass.

c) Berechne das Verstärkungsmaß eines RL-Tiefpass bei den Extremfrequenzen 0Hz und +∞Hz.

d) Zeichne mit den Resultaten aus Punkt c) qualitativ den Amplitudengang G_{dB}=f(f) eines RL-Tiefpass.

4.5 Grenzfrequenz f_C eines Filters

Alle Amplitudengänge der im Versuch 2 untersuchten Filter zeigen, dass es keine präzise Frequenz gibt oberhalb derer die Schaltung das Eingangssignal vollständig abblockt oder durchlässt. Der Übergang zwischen dem Durchlass- und dem Sperrbereich ist also fließend.

Um Filter dennoch dimensionieren zu können definierte man willkürlich die Grenzfrequenz eines Filters wie folgt.

Definition:

Die **Grenzfrequenz f_C** (engl.: cutoff frequency) einer Schaltung ist die Frequenz bei der der Scheitelwert der Ausgangsspannung $\sqrt{2}$ -mal kleiner ist als der maximale Scheitelwert der Ausgangsspannung, wo also:

$$\hat{u}_{OUT} = \frac{\hat{u}_{OUT,MAX}}{\sqrt{2}}$$

$\hat{u}_{OUT}$ ist der Scheitelwert der Ausgangsspannung bei Grenzfrequenz.

$\hat{u}_{OUT,MAX}$ ist der maximale Scheitelwert der Ausgangsspannung bei einer beliebig anderen Frequenz.

Aufgabe 3:

Gegeben ist ein ideales RL-Tiefpass, d.h. die maximale Verstärkung ist 1. $\hat{u}_{IN} = 5V$.

a) Bestimme das maximale Verstärkungsmaß $G_{dB,MAX}$.

b) Gib $\hat{u}_{OUT,MAX}$ an.

c) Berechne $\hat{u}_{OUT}$ an der Grenzfrequenz.

d) Berechne das Verstärkungsmaß G_{dB} an der Grenzfrequenz f_C.

e) Bestimme die Differenz zwischen $G_{dB,MAX}$ und G_{dB}?

Aufgabe 4:

Gegeben ist ein reales RL-Tiefpass wo die maximale Verstärkung 0,8 ist. $\hat{u}_{IN} = 5V$.

a) Bestimme das maximale Verstärkungsmaß $G_{dB,MAX}$.

b) Gib $\hat{u}_{OUT,MAX}$ an.

c) Berechne $\hat{u}_{OUT}$ an der Grenzfrequenz.

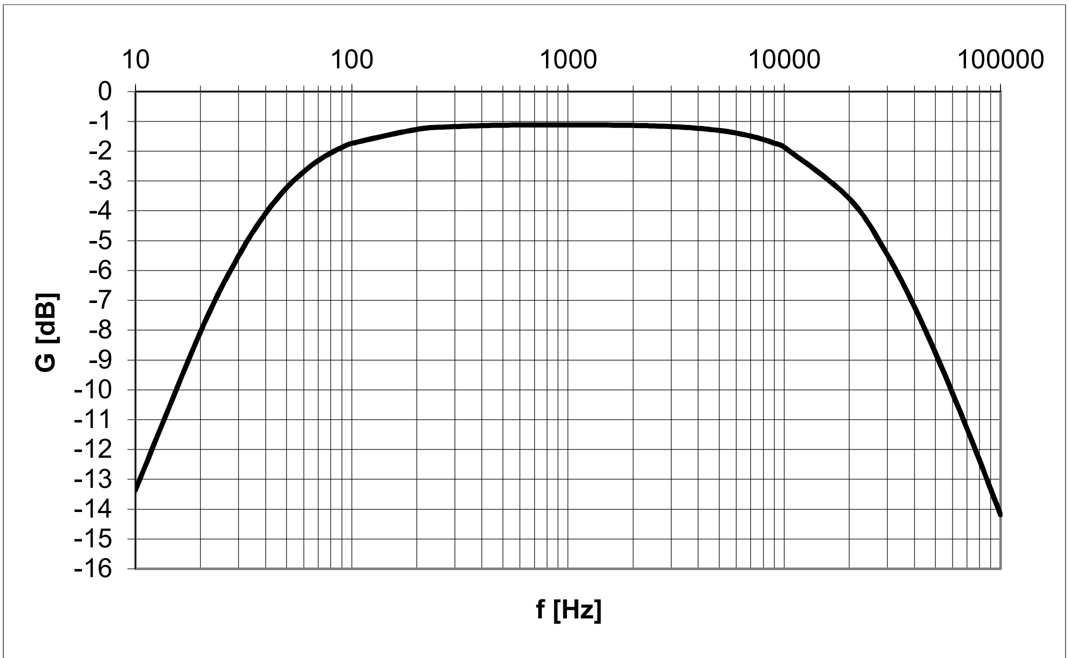
d) Berechne das Verstärkungsmaß G_{dB} an der Grenzfrequenz f_C.

e) Bestimme die Differenz zwischen $G_{dB,MAX}$ und G_{dB}?

Aufgabe 5:

a) Gib eine alternative Definition der Grenzfrequenz an indem du die Resultate aus Aufgabe 3 e) und 4 e) miteinander vergleichst.

b) Bestimme die Grenzfrequenzen des Bandpassfilters mit folgendem Amplitudengang.



Gegeben ist ein RL Tiefpass mit einer idealen Spule:

a) Zeichne das Zeigerdiagramm der Spannungen und Widerstände.

b) Für diese Schaltung gilt:

- $\hat{u}_{OUT} = \hat{u}_R$
- $\hat{u}_{OUT,MAX} = \hat{u}_{IN}$

Bei einem RL Tiefpass gilt also bei Grenzfrequenz ebenfalls:

$$\hat{u}_R = \frac{\hat{u}_{IN}}{\sqrt{2}}$$

Berechne aus dieser Information die Phasenverschiebung zwischen $\hat{u}_{IN}$ et $\hat{u}_R$ bei Grenzfrequenz.

c) Vergleiche $\hat{u}_R$ und $\hat{u}_L$ bei Grenzfrequenz.

d) Vergleiche R und X_L bei Grenzfrequenz.

e) Entwickle ausgehend von der Erkenntnis aus Punkt d) die Formel zur Berechnung der Grenzfrequenz aus den Bauteilwerten R und L.

Aufgabe 7:

a) Beschreibe wie sich die Grenzfrequenz eines RL-Tiefpass in Abhängigkeit von der Induktivität L der Spule verändert.

b) Dimensioniere ein RL-Tiefpass mit einer Grenzfrequenz von 120kHz.

c) Berechne den Widerstandswert des Widerstands in einem RL-Tiefpass mit einer Grenzfrequenz von 1MHz, wenn man eine Spule mit einer Induktivität von 100µH benutzt. (Lösung: $R=628\Omega$)

Aufgabe 8:

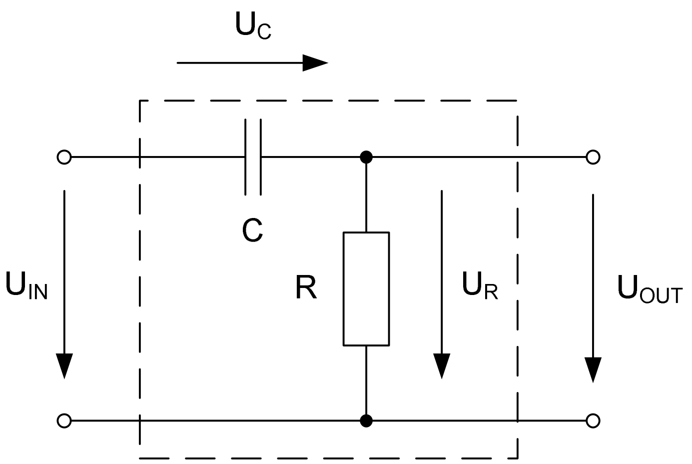
Schreibe das Kapitel 4.6 über das RC-Hochpass-Filter. Orientiere dich am Kapitel 4.3.

4.6 RC-Hochpass

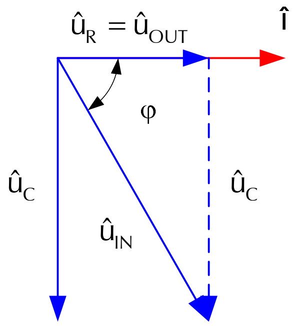
In Aufgabe 1 bildet der Kondensator in Reihe mit dem Lautsprecher einen Hochpass-Filter. Ein Hochpass-Filter ist eine elektronische Schaltung die tiefe Frequenzen dämpft und hohe Frequenzen passieren läßt.

Im Versuch 1 wurde des Weiteren festgestellt, dass sich ein Lautsprecher vor allem wie eine ohmsche Last verhält. Die einfachste Art ein Tiefpass-Filter zu realisieren ist also einen Kondensator und einen ohmschen Widerstand in Reihe zu schalten. Man nennt diese Schaltung "RC-Hochpass".

Schaltung eines RC-Hochpass:



Zeigerdiagramm:



Funktionsweise:

Der RC-Hochpass ist im Prinzip ein frequenzabhängiger Spannungsteiler. Die kleinste Spannung befindet sich dabei immer am kleinsten Widerstandwert.

Erhöht man die Frequenz, so gilt:

$$f\uparrow \Rightarrow X_C \downarrow \Rightarrow \hat{u}_C \downarrow \Rightarrow \hat{u}_R \uparrow \Rightarrow \hat{u}_{OUT} \uparrow$$

Für die sehr hohen Frequenzen gilt also:

$$\underline{\underline{\hat{u}_{OUT} \approx \hat{u}_{IN}}}$$

Verringert man die Frequenz, so gilt:

$$f\downarrow \Rightarrow X_C \uparrow \Rightarrow \hat{u}_C \uparrow \Rightarrow \hat{u}_R \downarrow \Rightarrow \hat{u}_{OUT} \downarrow$$

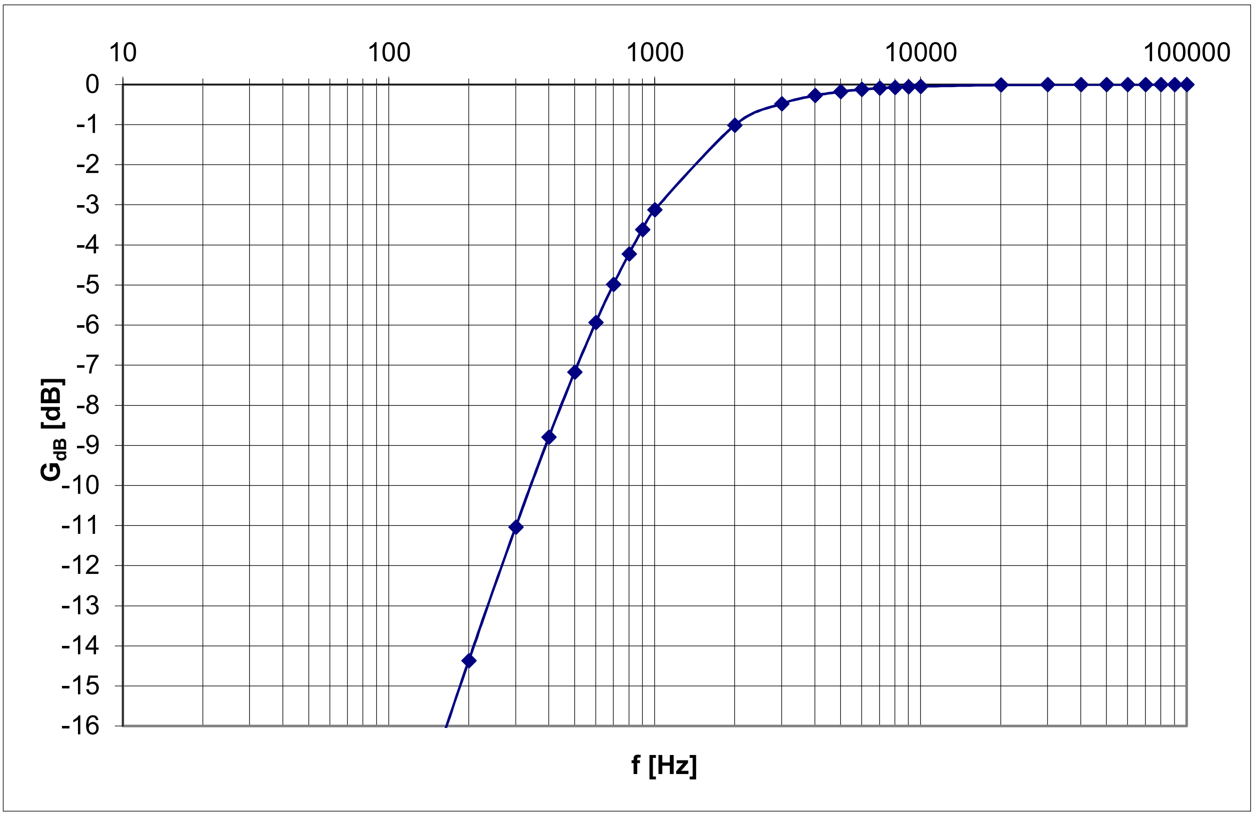
Für die sehr tiefen Frequenzen gilt also:

$$\underline{\underline{\hat{u}_{OUT} \approx 0V}}$$

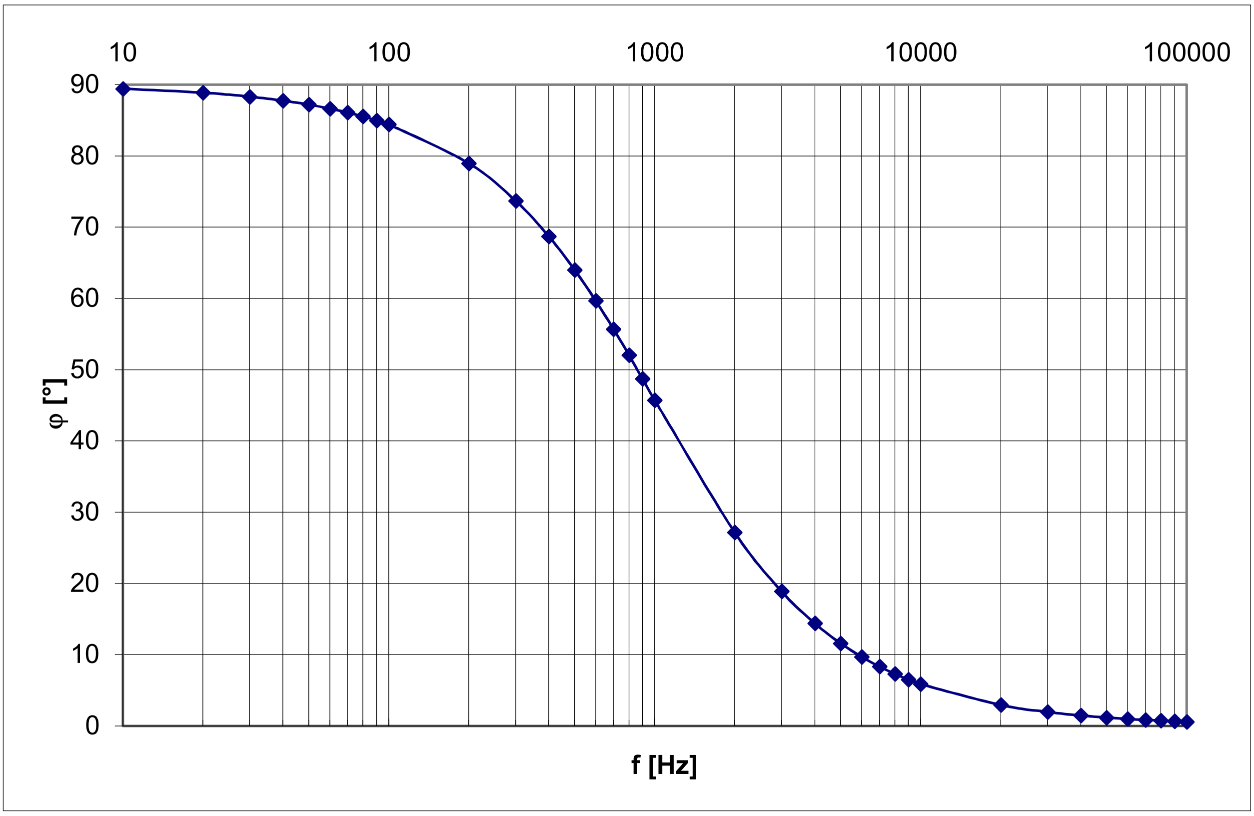
Erhöht man die Frequenz nimmt also der Scheitelwert der Ausgangsspannung $\hat{u}_{OUT}$ stetig ab.

<u>Bodediagramm eines RC-Hochpass (R=330Ω C=0,47μF):</u>

Amplitudengang:



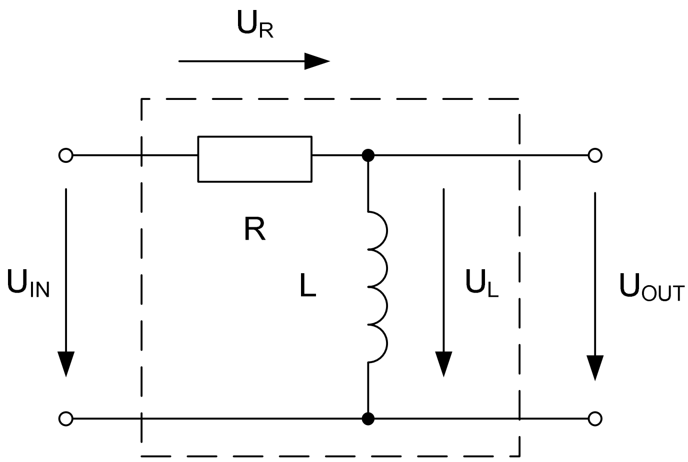
Phasengang:



4.7 RL-Hochpass

Durch das Vertauschen der Spule mit dem ohmschen Widerstand wird aus dem RL-Tiefpass ein RL-Hochpass.

Schaltung eines RL-Hochpass:



Funktionsweise:

Erhöht man die Frequenz, so gilt:

$$f \uparrow \Rightarrow X_L \uparrow \Rightarrow \hat{u}_L \uparrow \Rightarrow \hat{u}_{OUT} \uparrow$$

Für die sehr hohen Frequenzen gilt also:

$$\underline{\underline{\hat{u}_{OUT} \approx \hat{u}_{IN}}}$$

Verringert man die Frequenz, so gilt:

$$f \downarrow \Rightarrow X_L \downarrow \Rightarrow \hat{u}_L \downarrow \Rightarrow \hat{u}_{OUT} \downarrow$$

Für die sehr tiefen Frequenzen gilt also:

$$\underline{\underline{\hat{u}_{OUT} \approx 0V}}$$

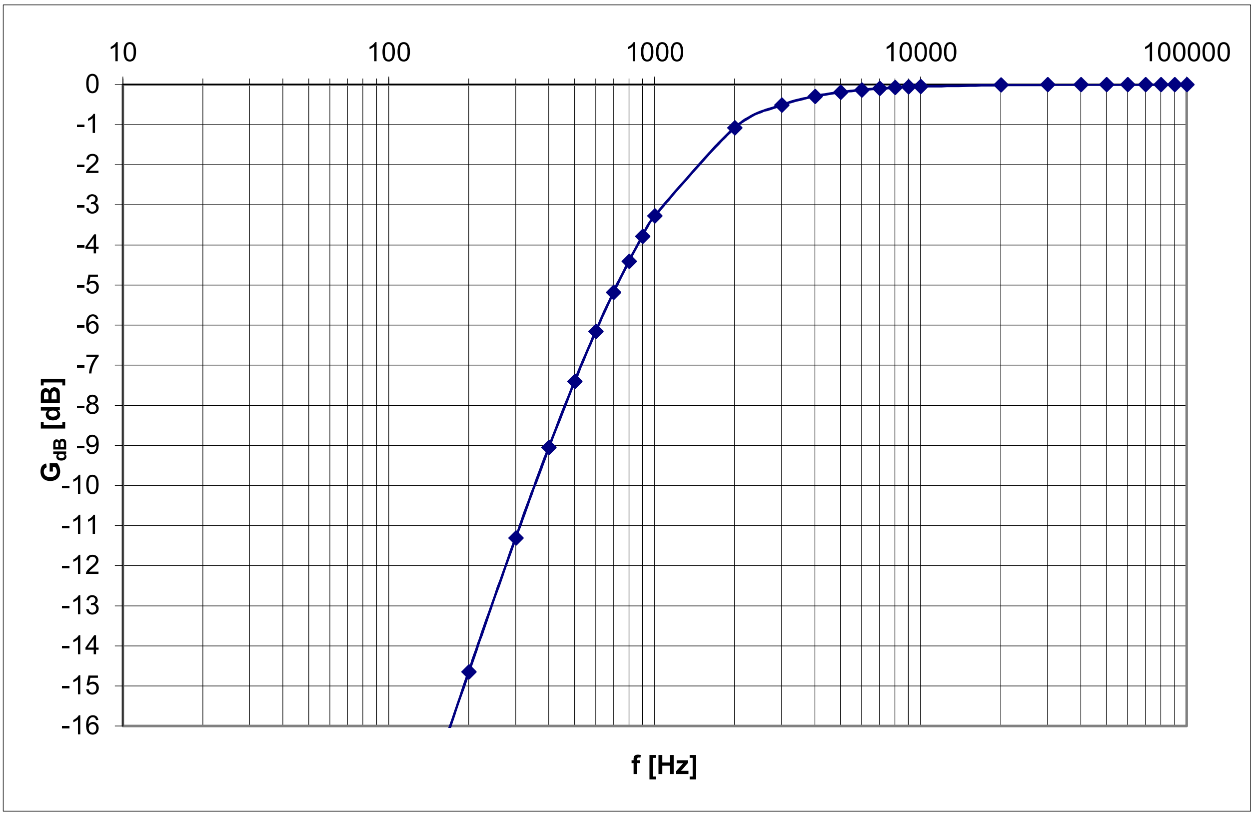
Grenzfrequenz:

Für die Grenzfrequenz gilt die gleiche Formel für den RL-Hochpass wie für den RL-Tiefpass:

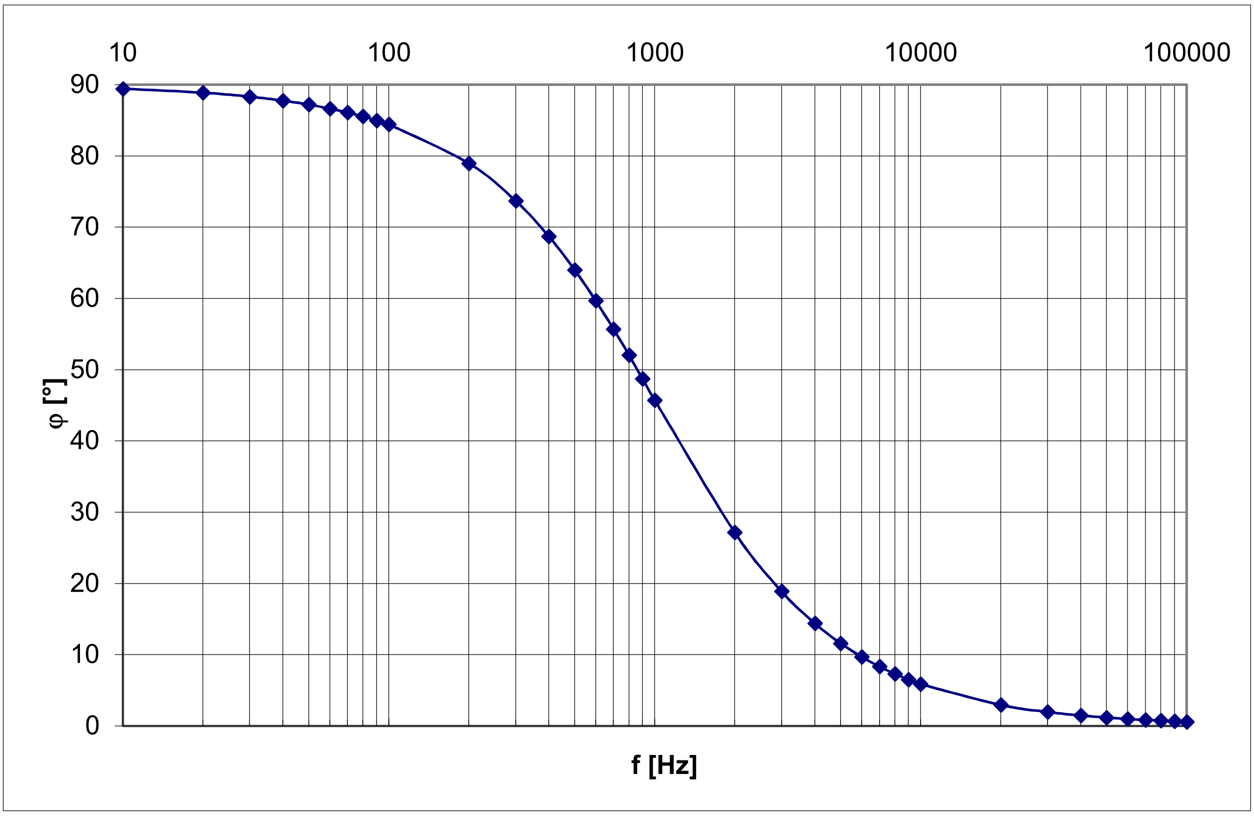
$$\boxed{f_C = \frac{R}{2 \cdot \pi \cdot L}}$$

Bodediagramm eines RL-Hochpass (R=220Ω L=22mH):

Amplitudengang:



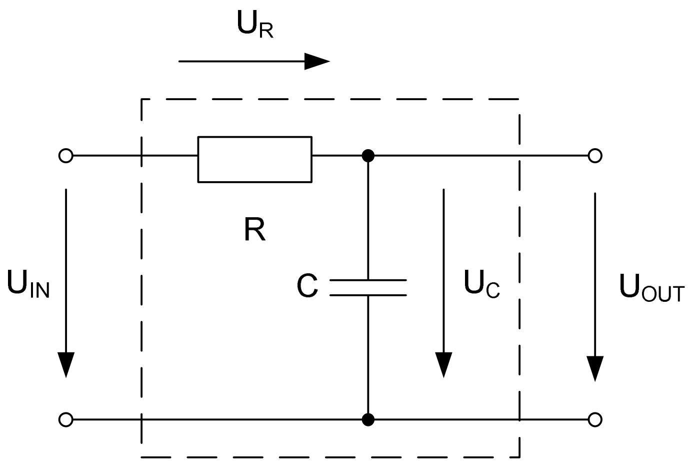
Phasengang:



4.8 RC-Tiefpass

Durch das Vertauschen des Kondensators mit dem ohmschen Widerstand wird aus dem RC-Tiefpass ein RC-Hochpass.

Schaltung eines RC-Tiefpass:



Funktionsweise:

Erhöht man die Frequenz, so gilt:

$$f \uparrow \Rightarrow X_C \downarrow \Rightarrow \hat{u}_C \downarrow \Rightarrow \hat{u}_{OUT} \downarrow$$

Für die sehr hohen Frequenzen gilt also:

$$\underline{\underline{\hat{u}_{OUT} \approx 0V}}$$

Verringert man die Frequenz, so gilt:

$$f \downarrow \Rightarrow X_C \uparrow \Rightarrow \hat{u}_C \uparrow \Rightarrow \hat{u}_{OUT} \uparrow$$

Für die sehr tiefen Frequenzen gilt also:

$$\underline{\underline{\hat{u}_{OUT} \approx \hat{u}_{IN}}}$$

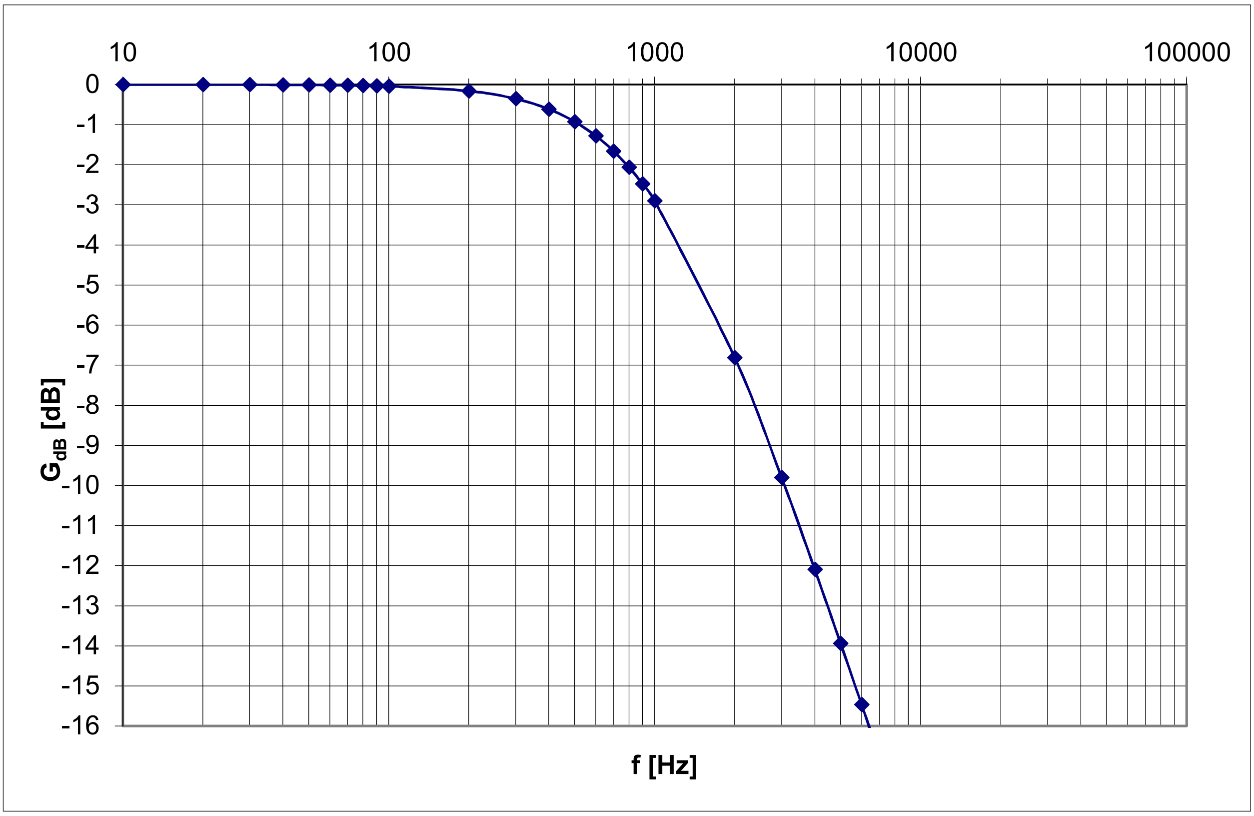
Grenzfrequenz:

Für die Grenzfrequenz gilt die gleiche Formel für den RC-Tiefpass wie für den RC-Hochpass:

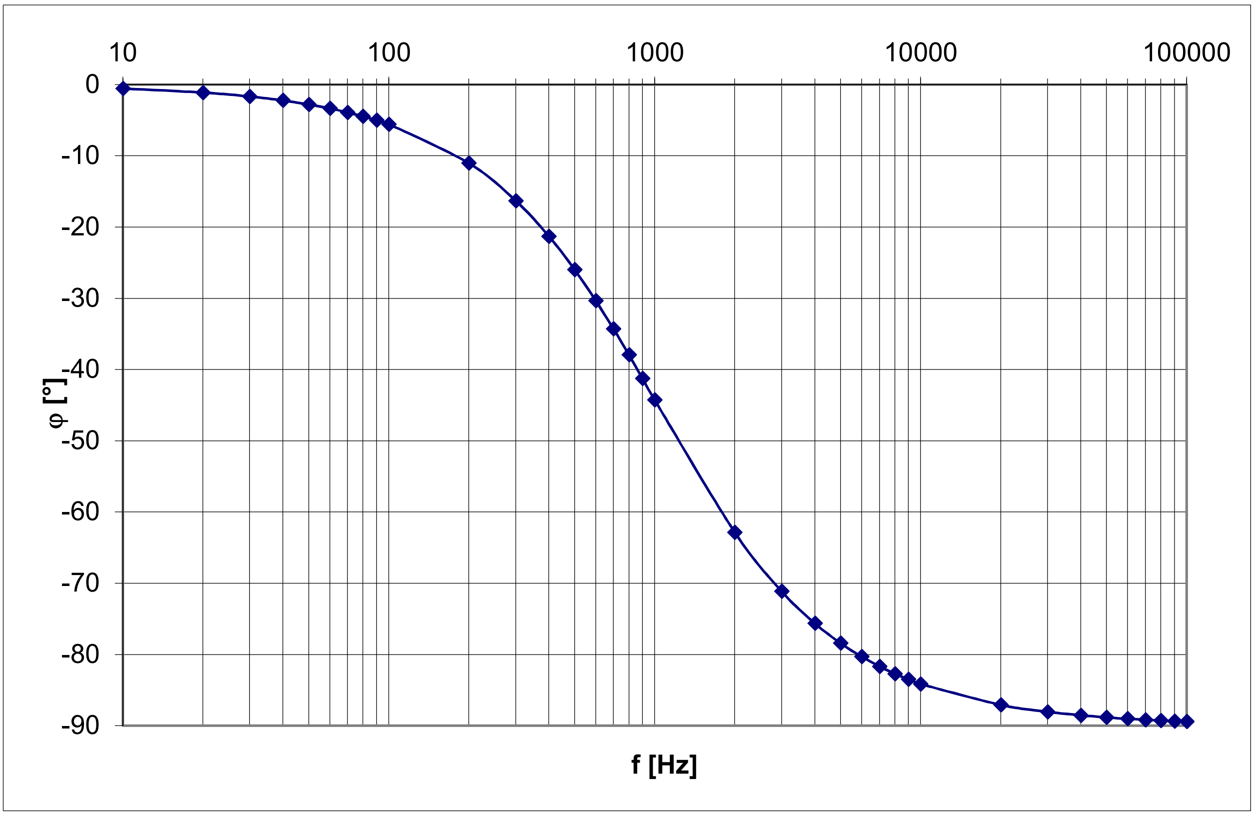
$$\boxed{f_C = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C}}$$

Bodediagramm eines RC-Tiefpass (R=330Ω C=0,47μF):

Amplitudengang:



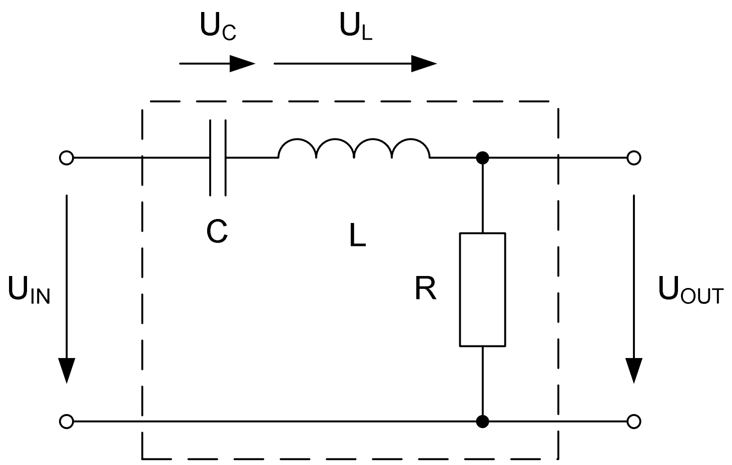
Phasengang:



4.9 RLC-Bandpass

Ein Bandpass-Filter ist eine elektronische Schaltung die mittlere Frequenzen durchlässt und tiefe sowie hohe Frequenzen dämpft. Eine Möglichkeit ein solches Filter zu realisieren ist das RLC-Bandpass.

Schaltung eines RLC-Bandpass:



Funktionsweise:

Für die sehr tiefen Frequenzen gilt:

$$\begin{gathered} X_C >> R \\ \Rightarrow \hat{u}_C >> \hat{u}_{OUT} \\ \Rightarrow \hat{u}_{OUT} \approx 0V \end{gathered}$$

Für die sehr hohen Frequenzen gilt:

$$\begin{gathered} X_L >> R \\ \Rightarrow \hat{u}_L >> \hat{u}_{OUT} \\ \Rightarrow \hat{u}_{OUT} \approx 0V \end{gathered}$$

Bei *Resonanzfrequenz f_0* gilt:

Im Amplitudengang eines idealen RLC-Bandpass sieht man, dass der Spannungsverstärkungsfaktor nur bei einer einzigen Frequenz genau 1 ist. Diese Frequenz nennt man *Resonanzfrequenz f_0*. Bei dieser Frequenz muss also $\hat{u}_{OUT} \approx \hat{u}_{IN}$ sein. Ausgehend von den vorherigen Schaltungen könnte man also versucht sein zu behaupten, dass sowohl $\hat{u}_C$ als auch $\hat{u}_L$ Null sind bei Resonanz. Dies würde aber wiederum bedingen, dass sowohl X_C also auch X_L bei Resonanzfrequenz gleichzeitig Null sind, was nicht möglich ist.

Der Fehler in der Überlegung liegt darin, dass U_{IN} nicht die algebraische sondern die vektorielle Addition der drei Spannung U_C, U_L und U_{OUT} ist.

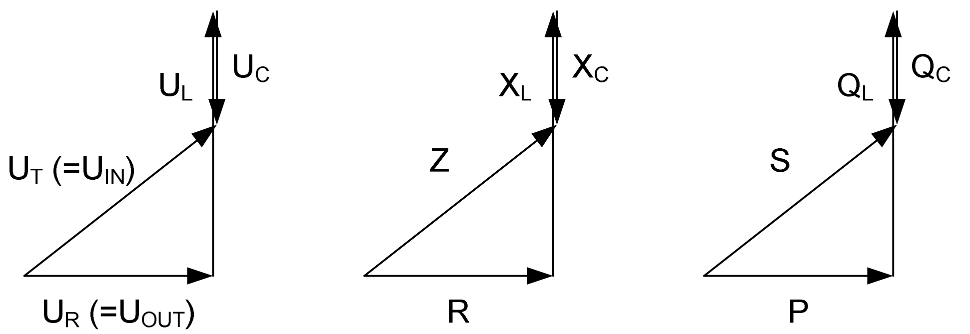
$$U_{IN} \neq U_C + U_L + U_{OUT}$$

$$\vec{U}_{IN} = \vec{U}_C + \vec{U}_L + \vec{U}_{OUT}$$

Betrachten wir uns also die Zeigerdiagramme der Spannungen und Widerstände des RLC-Bandpass.

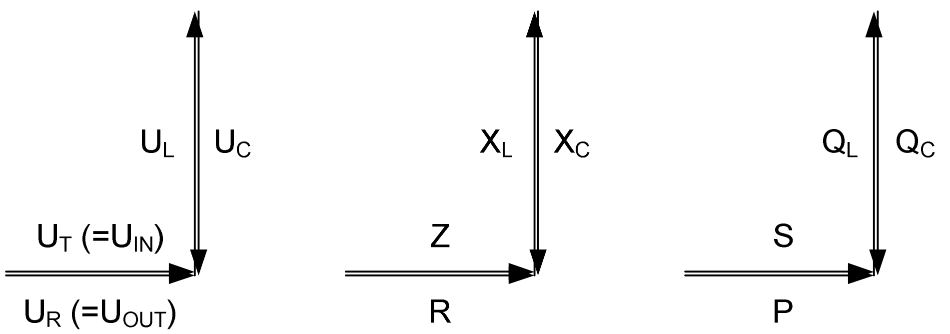
Für eine beliebige Frequenz gilt:

Zeigerdiagramm der Spannungen: | **Zeigerdiagramm der Widerstände:** | **Zeigerdiagramm der Leistungen:**



Bei Resonanzfrequenz sehen die drei Diagramme wie folgt aus.

Wenn f = f_0, dann gilt:



Im Zeigerdiagramm der Spannungen sieht man, dass bei Resonanzfrequenz $\hat{u}_{OUT} = \hat{u}_{IN}$ also $G_U=1$. U_C und U_L kompensieren sich. $\vec{U}_C + \vec{U}_L = \vec{0}$

Im Zeigerdiagramm der Widerstände erkennt man an der Tatsache Z=R, dass sich die ganze Schaltung wie ein ohmscher Widerstand verhält. X_C und X_L kompensieren sich. $\vec{X}_C + \vec{X}_L = \vec{0}$

Im Zeigerdiagramm der Leistungen erkennt man an der Tatsache S=P, dass die ganze Schaltung nur Wirkleistung verbraucht. Q_C und Q_L kompensieren sich. $\vec{Q}_C + \vec{Q}_L = \vec{0}$

Aufgabe 9:

Entwickle die Formel zur Berechnung von f_0 wenn man L und C kennt.

Definitionen:

Man nennt *Resonanzfrequenz f_0* eines RLC-Bandpass die Frequenz bei der der Spannungsverstärkungsfaktor maximal ist.

Man bezeichnet die Differenz zwischen oberer Grenzfrequenz f_{UC} und unterer Grenzfrequenz f_{OC} als *Bandbreite Δf*.

$$\boxed{\Delta f = f_{UC} - f_{LC}}$$

Für das RLC-Bandpass im Speziellen gilt des Weiteren:

$$\Delta f_{RLC} = \frac{R}{2 \cdot \pi \cdot L}$$

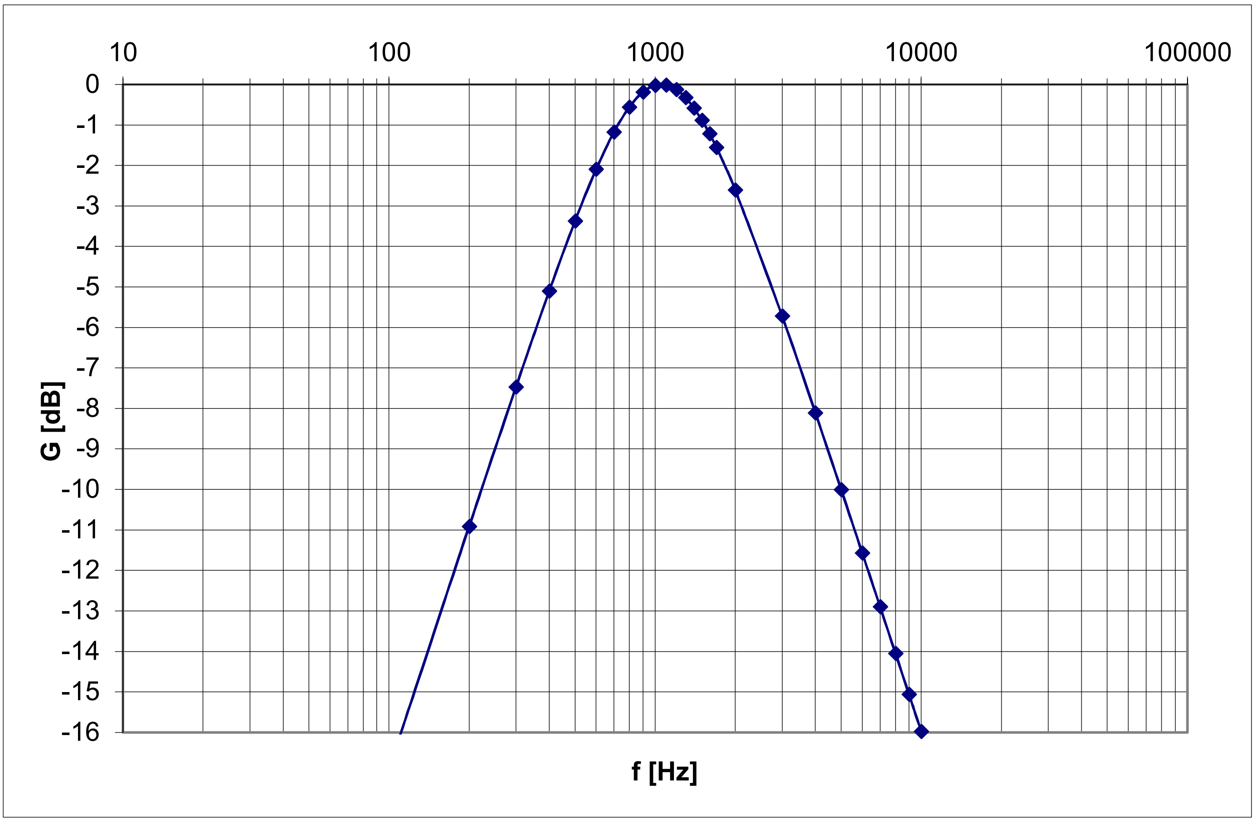
Das Verhältnis von Resonanzfrequenz f_0 zur Bandbreite Δf wird als *Güte Q* bezeichnet.

$$\boxed{Q = \frac{f_0}{\Delta f}}$$

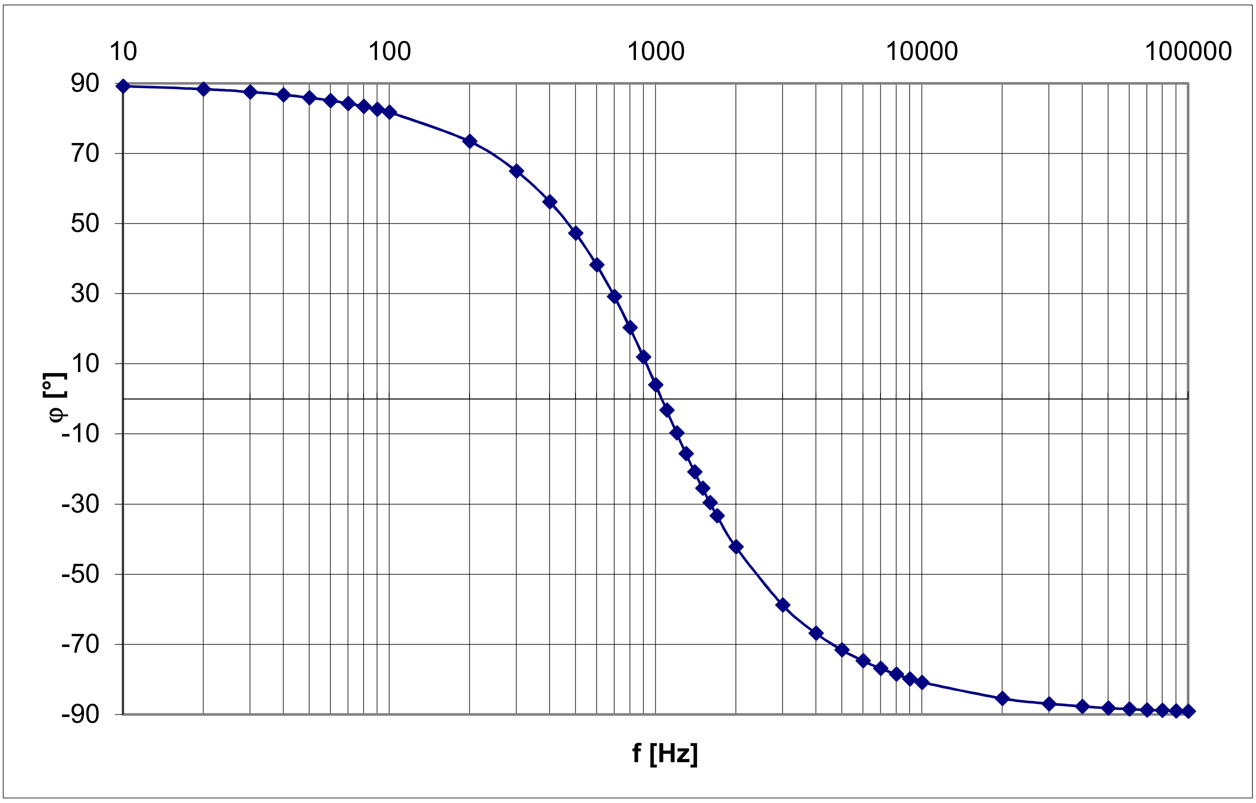
Ein Filter mit einer hohen Güte bezeichnet also ein Filter das sehr selektiv ist, also ein kleine Bandbreite im Verhältnis zur Resonanzfrequenz hat.

Bodediagramm eines RLC-Bandpass (R=330Ω C=0,69μF L=33mH):

Amplitudengang:



Phasengang:



Aufgaben zum RLC-Bandpass:

1. Berechne die Resonanzfrequenz des RLC-Bandpass aus obigem Amplitudengang. Vergleiche den berechneten Wert mit dem abgelesenen Wert.
2. Bestimme im Amplitudengang des obigen RLC-Bandpass graphisch die Grenzfrequenzen und berechne daraus die Bandbreite. Vergleiche diesen Wert mit dem Wert der sich aus den Bauteilwerten ergibt.

Zur Information:

In der Informatik wird der Begriff "Bandbreite" missbräuchlich auch als Synonym für die Übertragungsgeschwindigkeit benutzt. Man findet schon mal Sätze wie: "Die Entfernung des Kundenstandortes vom nächsten Hauptverteiler beeinflusst die maximal mögliche Übertragungs-bandbreite."
Dieser Fehler kommt daher, dass es einen Zusammenhang zwischen der Bandbreite und der maximalen Übertragungsgeschwindigkeit gibt. Je höher die Bandbreite ist, umso höher kann auch die Übertragungsgeschwindigkeit sein. Dies rechtfertigt aber nicht die synonyme Verwendung der beiden Begriffe. Siehe auch Kapitel 3.4 (Shannon-Hartley-Gesetz).

3. Berechne die Güte des obigen RLC-Bandpass.
4. Entwickle die Schaltung einer Bandsperre.
5. Entwickle mit Hilfe deiner bisherigen Kenntnisse über die Filter eine alternative Bandpass-Schaltung die keine Spulen enthält.

   Tipp: Ein Bandpass dämpft die tiefen Frequenzen und die hohen Frequenzen.

information pour le prof:

$$f_{LC,RLC} = \frac{1}{2\pi}\left(\sqrt{\frac{1}{LC}+\left(\frac{R}{2L}\right)^2} - \frac{R}{2L}\right) \qquad f_{UC,RLC} = \frac{1}{2\pi}\left(\sqrt{\frac{1}{LC}+\left(\frac{R}{2L}\right)^2} + \frac{R}{2L}\right)$$

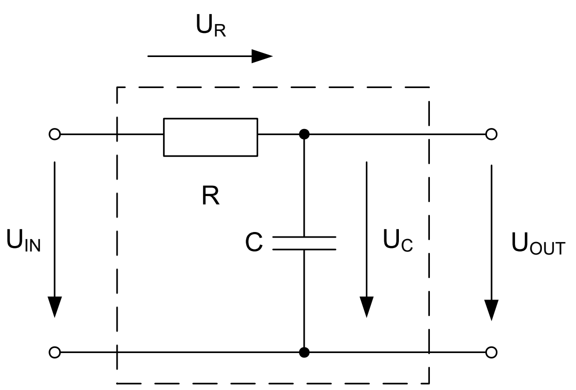
$$Q_{RLC} = \frac{2\cdot\pi\cdot f_0\cdot L}{R} \qquad f_0 = \sqrt{f_{LC}\cdot f_{UC}}$$

interessante Aufgabe: f_{LC} und f_{UC} bestimmen wenn f_0 und Δf bekannt. -> Gleichung 2. Grades

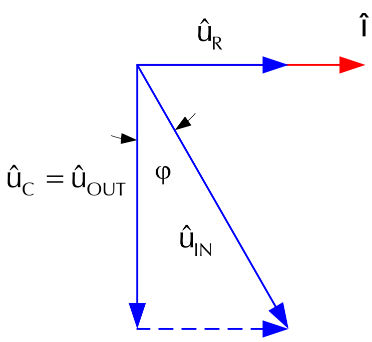
4.10 Mathematische Herleitung eines Bodediagramms

Mathematisch gesehen ist der Amplitudengang der Graph einer Funktion wo die Variablen f und G_{dB} sind statt x und y. Im Folgenden wollen wir versuchen die Funktionsgleichungen des Amplituden-und des Phasengangs eines RC-Tiefpass herzuleiten.

Schaltung eines RC-Tiefpass:



Zeigerdiagramm:



$$G_U = \frac{\hat{u}_{OUT}}{\hat{u}_{IN}} = \cos\varphi = \frac{X_C}{Z} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{1}{\omega C\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\cdot\left((\omega RC)^2+1\right)}}$$

$$\underline{\underline{G_U = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}}}$$

Für den Phasengang $\varphi=f(f)$ gilt:

$$\tan(\varphi) = \frac{\hat{u}_R}{\hat{u}_C} = \frac{R}{X_C} = \frac{R}{\frac{1}{\omega C}}$$

$$\tan(\varphi) = \omega RC$$

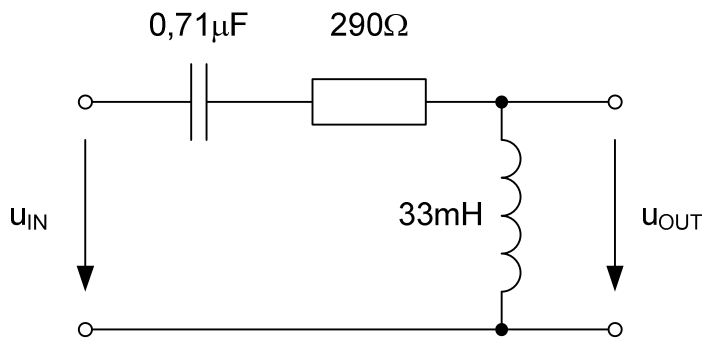
$$\underline{\underline{\varphi = -\arctan(\omega RC)}}$$

$\hat{u}_{OUT}$ ist nacheilend, deshalb ist φ negativ.

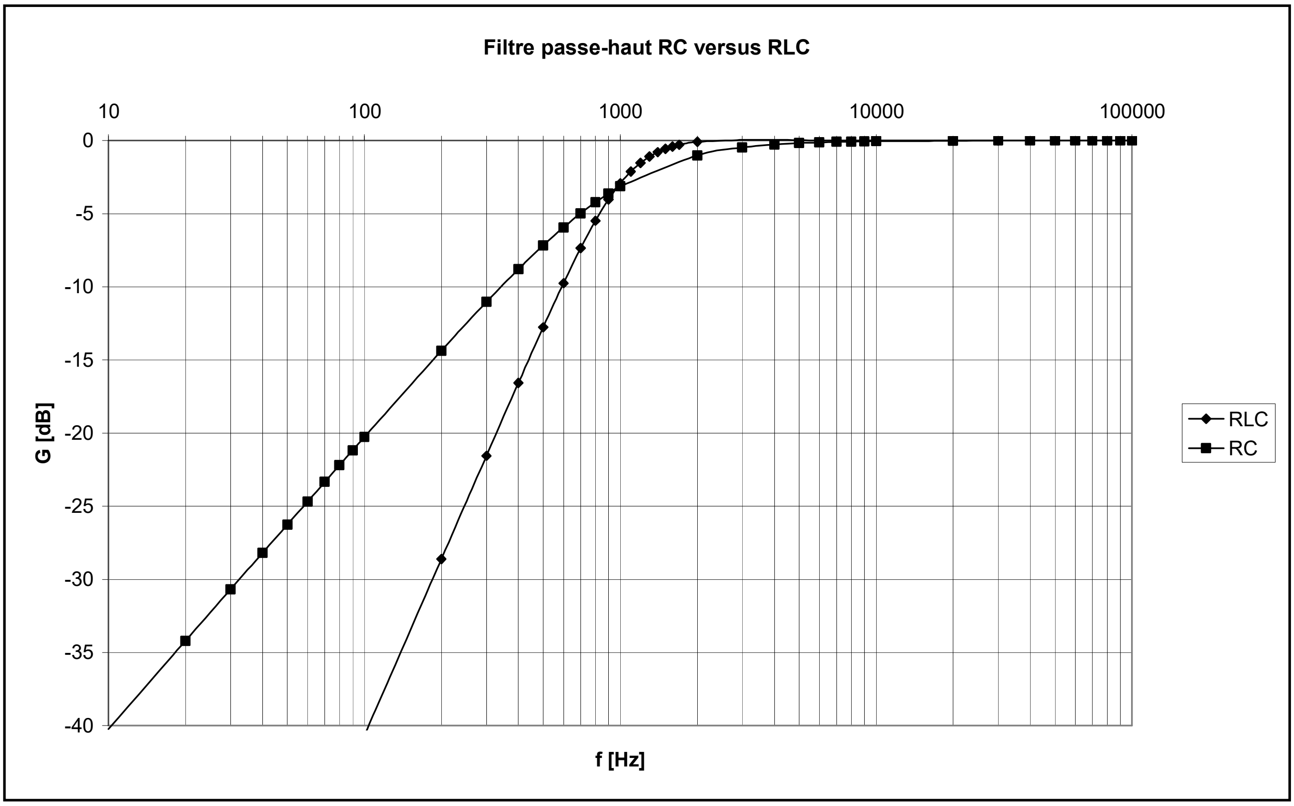
4.11 Ordnung eines passiven Filters

Aufgabe 10:

a) Bestimme das Frequenzverhalten des folgenden Filters?



b) Vergleiche den Amplitudengang des RLC-Hochpass und des RC Hochpass mit identischer Grenzfrequenz. Welches der beiden Filter scheint dir idealer zu sein?



Definition:

Die Ordnung eines Filters zeigt sich in der Steigung der abfallenden Flanke im Sperrbereich seines Amplitudengangs.

Steigung der Flanke	Ordnung des Filters	
	Hochpass oder Tiefpass	**Bandpass**
20 dB/Dekade	1	2
40 dB/Dekade	2	4
60 dB/Dekade	3	6

Aufgabe 11:

Zeichne ein Tiefpass zweiter Ordnung.