3. Analyse de Fourier et spectre d'amplitudes

3.1 L'Analyse de Fourier

3.1.1 Introduction

D'après le mathématicien français Fourier (1768-1830) tout signal périodique peut être décomposé en une somme de signaux de forme sinusoïdale ayant des amplitudes et phases différentes. Les fréquences des signaux sinusoïdaux sont des multiples de la fréquence de base du signal périodique. La figure 1 montre le résultat d'une superposition de quatre signaux sinusoïdaux en vue de la formation d'un signal en dent de scie.

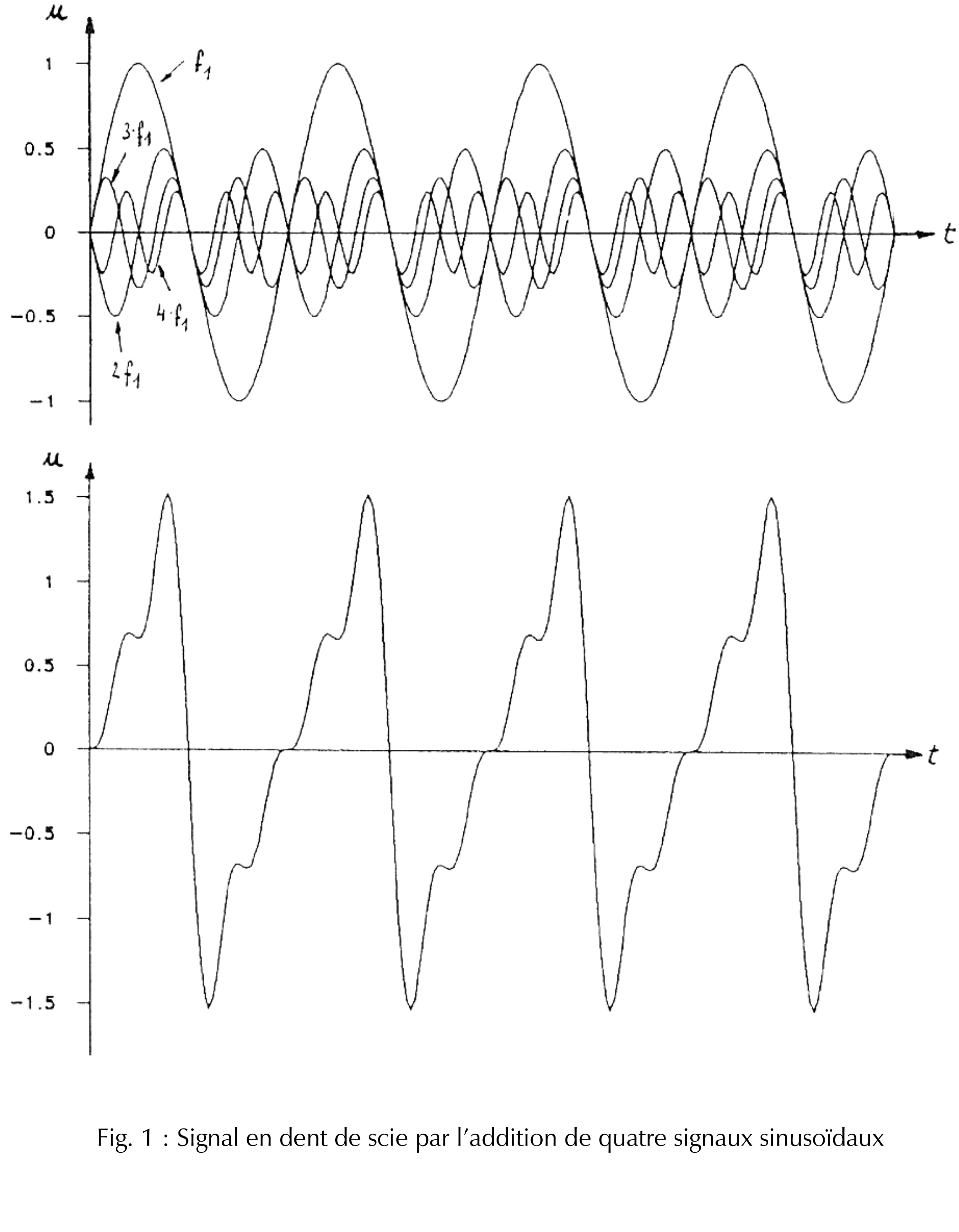


Fig. 1 : Signal en dent de scie par l'addition de quatre signaux sinusoïdaux

Afin d'obtenir une dent de scie parfait on devrait théoriquement additionner une infinité de signaux sinusoïdaux. Les oscillations sinusoïdales ayant des fréquences qui sont des multiples de la fréquence de base f_1, sont appelées "harmoniques".

La méthode mathématique (ou méthode par mesures) permettant de déterminer les amplitudes et phases des harmoniques est appelé *Analyse de Fourier*.

3.1.2 Expérience: Analyse harmonique de Fourier d'une oscillation rectangulaire

Dans cette expérience on fait une analyse de Fourier d'une tension rectangulaire. Une tension rectangulaire disposant d'une amplitude $\hat{u} = 1$ V et d'une fréquence de $f_1 = 1$ kHz est appliquée à l'entrée d'un filtre passe-bande variable. Ce filtre passe-bande variable dispose d'une fréquence de résonance variable. En variant cette fréquence de résonance toute tension sinusoïdale peut être filtrée. Les harmoniques ainsi obtenues peuvent être visualisées par oscilloscope. L'amplitude, la différence de phase et la fréquence de chaque harmonique sont ainsi mesurées. Pour déterminer la différence de phase on doit procéder aussi à la mesure du signal d'entrée.

montage:

(paramètres à régler sur le filtre: G_U=1 Q=100)

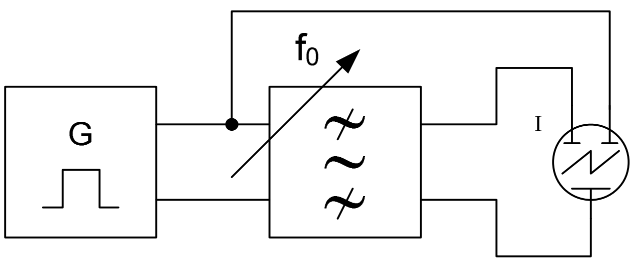


Fig. 2 : Schéma de mesure pour analyser le signal rectangulaire d'après Fourier

résultats:

N°	f (kHz)	û (V)	φ (°)	Dénomination

Observations:

a) Les fréquences des tensions sinusoïdales sont des multiples (impaires dans ce cas) de la fréquence f_1 du signal rectangulaire.

b) Les amplitudes des harmoniques diminuent avec la fréquence. Pour le signal rectangulaire on constate une proportionnalité inverse entre l'amplitude et la fréquence.

Applets sur l'analyse harmonique:

http://www.falstad.com/mathphysics.html

http://www.schulphysik.de/java/physlet/applets/synthese.html

http://lumimath.univ-mrs.fr/~jlm/cours/fourier/fourier2.htm

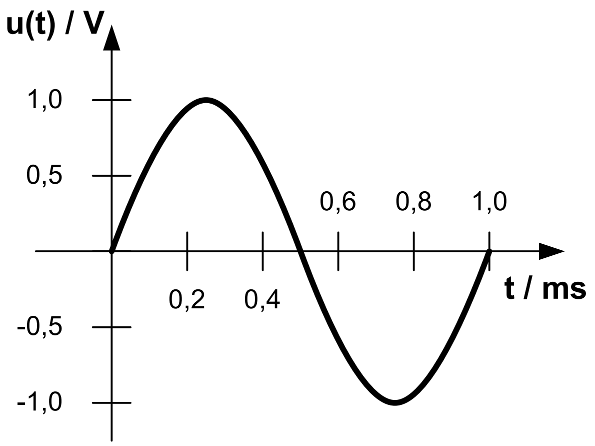
3.2 Le spectre d'amplitudes

A part du diagramme temporel tout signal peut aussi être visualisé sous forme d'un spectre d'amplitudes ce qui est le diagramme û=f(f).

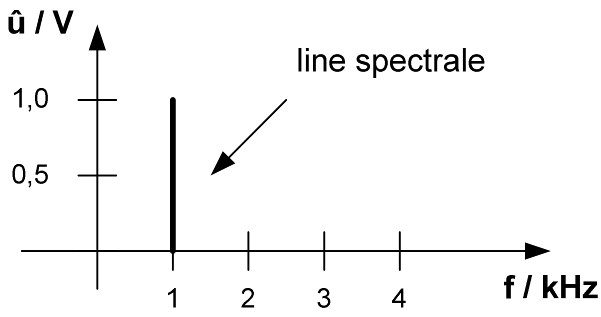
Exemples:

a) Spectre d'une tension sinusoïdale (f_1 = 1 kHz)

diagramme temporel



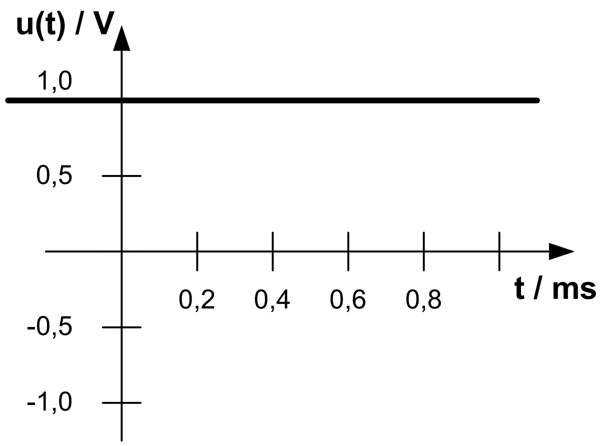
spectre d'amplitude



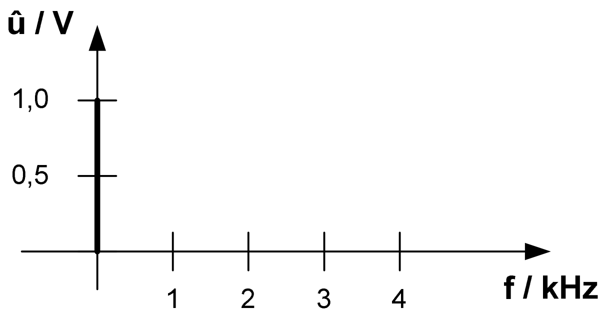
Dans le spectre apparaît une ligne spectrale à la valeur de la fréquence mesurée. L'hauteur de la ligne correspond à l'amplitude de la tension sinusoïdale.

b) Spectre d'une tension continue

diagramme temporel



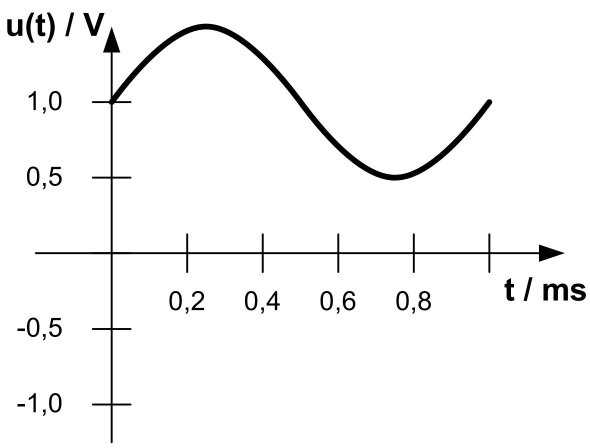
spectre d'amplitude



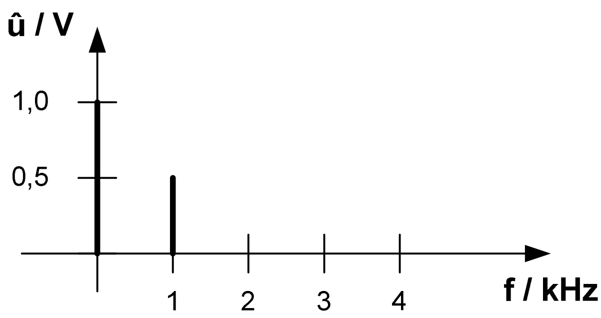
Une tension continue a une fréquence de f = 0 Hz.

c) Spectre d'une tension mixte

diagramme temporel



spectre d'amplitude



Exercice 1:

Tracez le spectre d'amplitude de la tension rectangulaire (û=1V, f=1kHz) analysé lors de l'expérience précédente.

Remarque:

A part du spectre d'amplitude on peut aussi tracez le spectre de phase φ=f(f). Les deux diagrammes ensemble sont appelés *diagramme de Bode*.

Dans la plupart des cas l'observation du spectre d'amplitude est suffisante.

3.3 Méthodes pour déterminer le spectre d'un signal

3.3.1 Méthode par filtre passe-bande variable

Cette méthode a été montrée lors de l'expérience précédente. Elle est laborieuse et relativement imprécise.

3.3.2 Méthode mathématique (par calcul intégral)

A l'aide du calcul intégral les amplitudes et les phases des harmoniques peuvent être déterminées à partir de la fonction u=f(t).

3.3.3 FFT (Fast Fourier Transform)

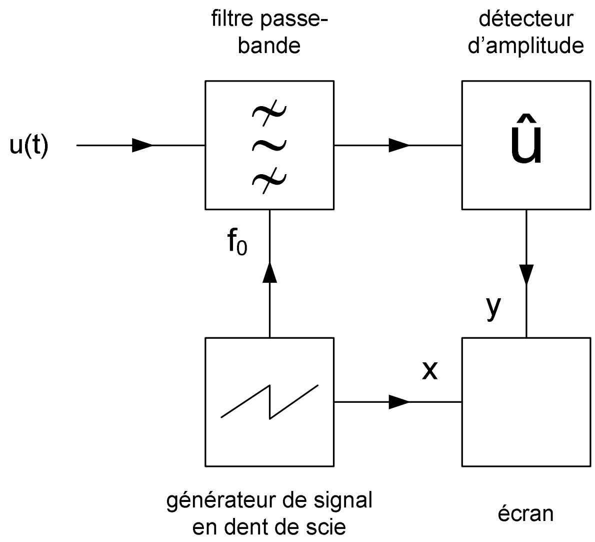
La FFT est un algorithme (= une méthode de calcul) pour calculer le spectre d'amplitude à partir d'un diagramme temporel digitalisé. Beaucoup d'oscilloscopes digitaux contiennent cet algorithme et peuvent donc aussi afficher des spectres d'amplitude.

3.3.4 Méthode par analyseur de spectre

L'analyseur de spectre (abréviation: SA) est un appareil de mesure à l'aide duquel on peut visualiser en temps réel le spectre de n'importe quel signal mesuré. Quoique l'analyseur de spectre forme la méthode la plus efficace pour déterminer un spectre, c'est malheureusement aussi la plus couteuse.

Le principe de fonctionnement d'un SA est basé sur la méthode à filtre passe bande variable.

schéma d'un analyseur de spectre:



Dans un analyseur de spectre on fait passer le signal d'entrée à travers un filtre passe-bande. La fréquence de résonance du filtre varie en fonction de la tension qui sort du générateur de signal à dent de scie. La même chose vaut pour la position horizontale (= axe des x) du faisceau qui trace la courbe sur l'écran. La position verticale du faisceau varie en fonction de l'amplitude du signal qui sort du filtre.

En pratique les analyseurs de spectre ne détectent pas l'amplitude mais la puissance en fonction de la fréquence. Cette puissance est affichée en dBm sur l'écran. Il vaut:

$$\boxed{P_{dBm} = 10 \cdot \log\left(\frac{P}{1mW}\right)}$$

P est la puissance en milliwatt (mW)

P_{dBm} est le niveau de puissance en décibel par rapport au milliwatt (dBm)

Exercice 2:

Complétez le tableau suivant:

P / mW	**P / dBm**
0,01	
0,1	
1	
10	
100	

conclusion:

Chaque fois qu'on augmente le niveau de la puissance d'un signal de 10dBm alors la puissance devient ______ fois plus grande.

Exercice 3:

a) Complétez le tableau suivant:

P / mW	**P / dBm**
	-6
	-3
	0
	3
	6

conclusion:

Chaque fois qu'on augmente le niveau de la puissance d'un signal de 3dBm alors la puissance devient ______ fois plus grande.

b) Déterminez sans calculatrice la puissance P (mW) si le niveau est 36dBm.

3.4 Importance de l'analyse harmonique dans la technique de communication

La connaissance des fréquences qui sont contenue dans un signal est fondamentale pour la transmission de signaux. Chaque canal de transmission (p.ex. câble bifilaire des P&T, câble coaxial des antennes collectives, l'air pour la transmission sans fils) est limité en fréquence c'est-à-dire il y a une fréquence maximale et parfois aussi une fréquence minimale qu'on peut transmettre à travers un certain canal de transmission.

La différence de la fréquence maximale à la fréquence maximale est appelé bande passante B. La vitesse maximale de transmission C_S dépend en autre de la bande passante du canal.

Loi de Shannon-Hartley:

$$\boxed{C_S = B \cdot \mathrm{ld}(1+SNR) = B \cdot \frac{\ln(1+SNR)}{\ln 2}}$$

C_S est la capacité de transmission d'un canal en Bit par seconde (bit/s)

$B=f_{MAX}-f_{MIN}$ est la bande passante du canal en Hertz (Hz)

SNR est le rapport signal à bruit du signal à la sortie du canal (sans unité)

3.4 Importance de l'analyse harmonique dans la technique de communication

(version prof)

La connaissance des fréquences qui sont contenue dans un signal est fondamentale pour la transmission de signaux. Chaque canal de transmission (p.ex. câble bifilaire des P&T, câble coaxial des antennes collectives, l'air pour la transmission sans fils) est limité en fréquence c'est-à-dire il y a une fréquence maximale et parfois aussi une fréquence minimale qu'on peut transmettre à travers un certain canal de transmission.

Si les fréquences contenues dans un signal dépassent la plage des fréquences qui peuvent passer par le canal, alors le signal va subir des distorsions (=déformations).

La différence de la fréquence maximale à la fréquence maximale est appelé bande passante B. La vitesse maximale de transmission C_S dépend en autre de la bande passante du canal.

Loi de Shannon-Hartley:

$$\boxed{C_S = B \cdot \mathrm{ld}(1+SNR) = B \cdot \frac{\ln(1+SNR)}{\ln 2}}$$

C_S est la capacité de transmission d'un canal en Bit par seconde (bit/s)

$B=f_{MAX}-f_{MIN}$ est la bande passante du canal en Hertz (Hz)

SNR est le rapport signal à bruit du signal à la sortie du canal (sans unité)

Le plus grand la bande passante d'un canal est, le plus grand la vitesse maximale de transmission par ce canal peut être.